

近似楕円がかける理由（四中心法の導出）

楕円は、なめらかに曲がり方が変化する曲線です。そのため、コンパスと定規だけを用いて、真の楕円を作図することはできません。

しかし、人々は古くから、いくつかの円弧を組み合わせることで、楕円らしく見える形、すなわち近似楕円を実現してきました。こうした作図法は、楕円の厳密な理論から生まれたというよりも、建築や製図などの実務の中で発達してきたと考えられます。

近似楕円の作図法の一つに、製図の教科書でよく紹介される四中心法があります。これは、四つの円弧をつないで曲線をつくる方法で、使うのはコンパスと定規だけです。では、なぜこれだけで、楕円らしい形がかけるのでしょうか。そのしくみを解説します。

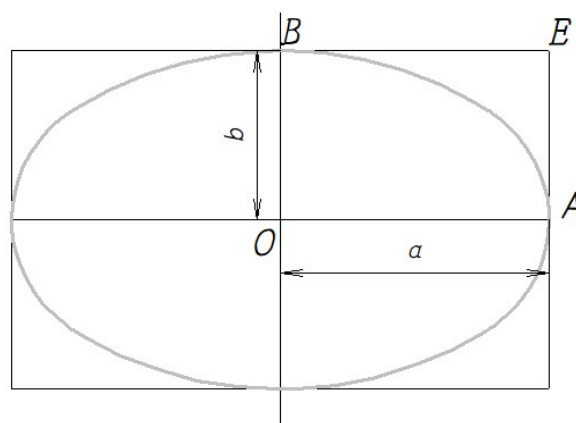


コロッセオ(ローマ。紀元1世紀)。人々は古くから、楕円に近い形を円弧の組み合わせで築いてきた。(撮影 Kasa Fue/CC BY-SA 4.0)

(1) こんな楕円がかきたい

図のような、長半径が a 、短半径が b の楕円をかきたい。

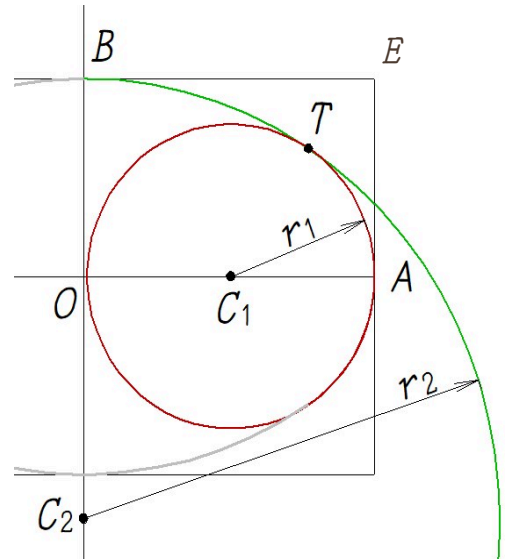
まず、原点を O 、長軸方向の端点を A 、短軸方向の端点を B 、 $OA = a$ 、 $OB = b$ 、長方形のもう一つの頂点を E としよう。



(2) 円弧をうまくつなげたら

そこで、 A から途中の点 T までは一つ目の円弧、 T から B までは二つ目の円弧でかけたでしょう。
一つ目の円弧の中心を C_1 、半径を r_1 、
二つ目の円弧の中心を C_2 、半径を r_2 、
としよう。

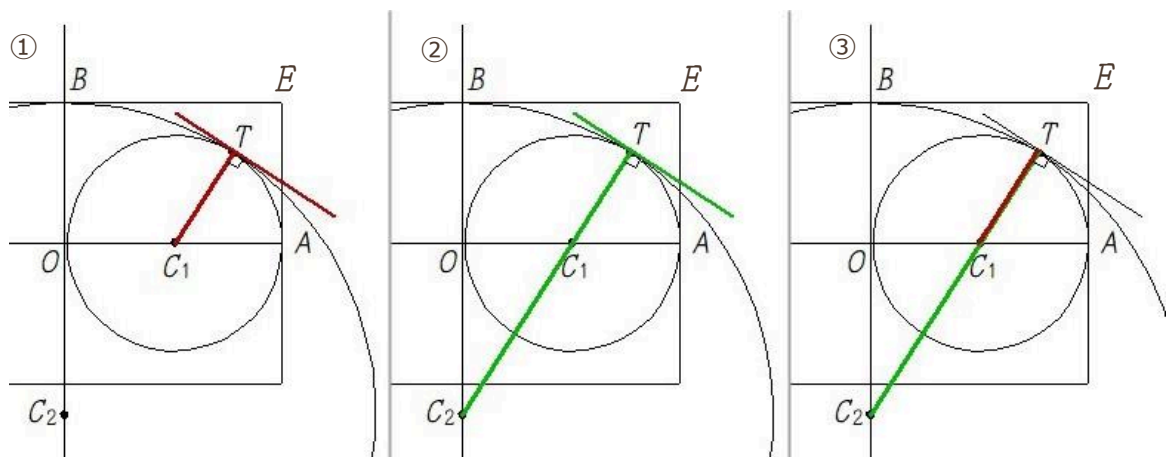
円弧 AT は A で縦の辺 AE に接したい。
だから、中心 C_1 は x 軸上にあるはずだ。
同じように、円弧 BT は B で横の辺 BE に接したい。
だから、中心 C_2 は y 軸上にあるはずだ。



(3) なめらかにつながるなら

2つの円弧をなめらかにつなげるには、点 T で接線が同じになればいいな。

- ①円弧 AT の中心は C_1 だ。だから、半径 C_1T は、点 T での接線に垂直になる。
- ②同じように、円弧 BT の中心は C_2 だ。だから、半径 C_2T も、点 T での接線に垂直になる。
- ③ここで、2つの円弧は点 T でなめらかにつながっている。
つまり、点 T での接線は同じ一本の直線になっている。



同じ点 T を通り、同じ接線に垂直な直線は一本しかない。だから、
 C_1 、 T 、 C_2 は一直線上に並ぶことになる。この直線が、点 T における共通法線だな。

(4) Tはどこにある？

なめらかにつなぐという条件だけでは、点 T の位置は決まらない。そこで、点 T における共通法線 C_1TC_2 は、対角線 AB と直交するとしよう。 C_1TC_2 と AB の交点を K とすると、次のことが言えるな。

『 C_1 、 T 、 C_2 、 K は一直線上にあり、
かつ、 $C_1TC_2 \perp AB$ である。』

次に、円弧 AT について考えよう。

この円弧の中心は C_1 なので、

$C_1A = C_1T \rightarrow \triangle AC_1T$ は二等辺三角形。

$\rightarrow \angle C_1AT = \angle ATC_1$

ここで、 C_1A は辺 AE に垂直で、また、 C_1T は辺 AB に垂直。

よって、等しい角 $\angle C_1AT$ と $\angle ATC_1$ の余角も等しい。

$\rightarrow \angle EAT = \angle TAB \rightarrow$ 直線 AT は $\angle EAB$ の二等分線。

次に、円弧 BT について考えよう。この円弧の中心は C_2 なので、

$C_2B = C_2T \rightarrow \triangle BC_2T$ は二等辺三角形。 $\rightarrow \angle C_2BT = \angle BTC_2$

ここで、 C_2B は辺 BE に垂直で、また、 C_2T は辺 AB に垂直。

よって、等しい角 $\angle C_2BT$ と $\angle BTC_2$ の余角も等しい。

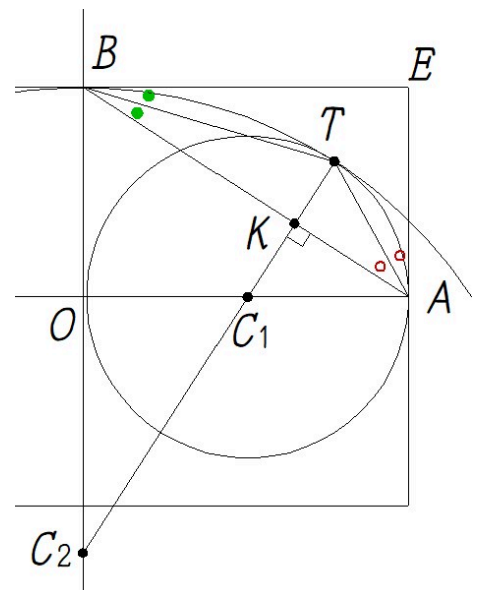
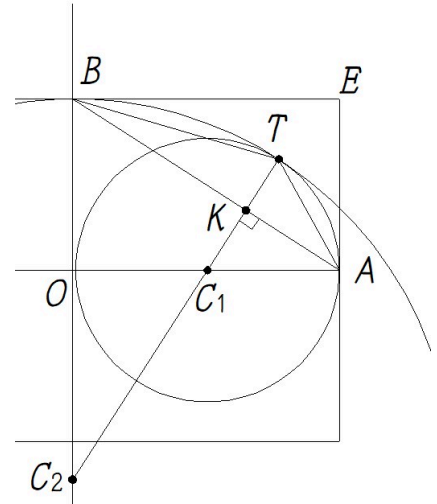
$\rightarrow \angle EBT = \angle TBA$

$\rightarrow$ 直線 BT は $\angle EBA$ の二等分線。

点 T は、 $\triangle AEB$ の2つの角の二等分線上にある。

$\rightarrow$ 三角形の角の二等分線の交点は内心だから

点 T は $\triangle AEB$ の内心



(5) Tが内心なら → 結論

共通法線を AB に垂直になるように取れば、

T は $\triangle AEB$ の内心になるとわかった。

では、このように T を取ったとする。

x 軸との交点が C_1 、 y 軸との交点が C_2 、

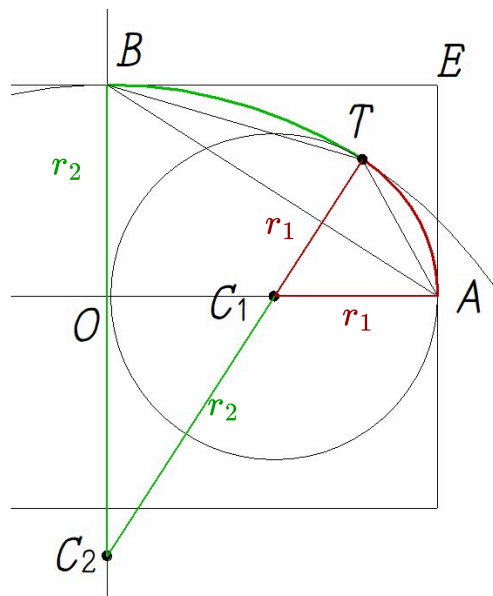
$$C_1A = C_1T = r_1, \quad C_2B = C_2T = r_2$$

となる。つまり、

C_1 を中心に半径 r_1 の円弧 AT をかき、

C_2 を中心に半径 r_2 の円弧 BT をかけば、

点 T でなめらかにつながる曲線がかけるというわけだ。



結論 $\triangle AEB$ の内心Tがわかれば、近似楕円がかける

「1-4-3-1 楯円」において説明した四中心法のかき方はステップが①～⑧までであるが、要するに内心を求めるためのステップである。

(6) AB上に点fを取る理由

四中心法によるかき方としては、

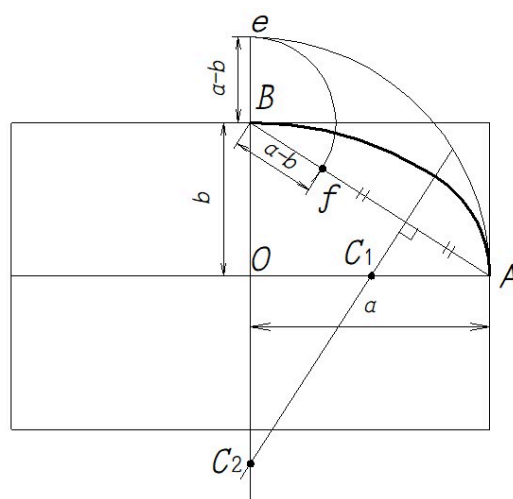
直線 AB 上に B から長さ $a - b$ の点 f を取る

→ Af の垂直二等分線をかき、 x 軸、 y 軸との

交点 C_1 、 C_2 を求め、 C_1A 、 C_2B を弧とする

近似楕円をかく、という説明が多い。

では、この点 f の意味はなんなのだろう？



(7) 点 f の正体

(5)のように、 $\triangle ABE$ の内心 T が求まっているとする。

点 D は、辺 AB 上の内接点である。頂点から内接点までの長さを図のようにすると、

$$AB = x + y, AE = x + z, BE = y + z,$$

また、 $AE = b, BE = a$ なので、

$$x + z = b, y + z = a, x + y = AB$$

$$\text{これらより、} x = \frac{AB - a + b}{2} = AD \quad \dots \textcircled{1}$$

AB 上に $Bf = a - b$ となる点 f を取る。

$Af = AB - Bf$ なので、

$$Af = AB - (a - b) = AB - a + b$$

$$\textcircled{1} \text{より } Af = 2AD$$

つまり、 D は Af の中点。また、 TD は AB に垂直

だから直線 TD は Af の垂直二等分線である。

つまり、 AB 上に $Bf = a - b$ となる点 f を取り、

Af の垂直二等分線をひけば、(5)で得られた

x 軸との交点 C_1 、 y 軸との交点 C_2 が得られる。

