

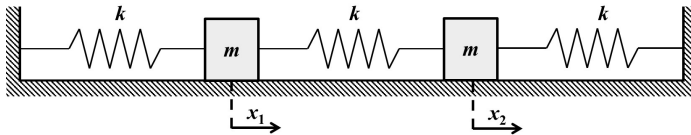
# 第 1 章 線形代数入門

## §1.1 なぜ線形代数が必要なのか

線形代数の教科書は「ベクトル」から始めるものが多いのですが、本節では、目標となる振動解析を先に見ておきます。これから抽象的な話が続くと、何のためにやっているのかを見失いがちです。具体的なゴールを先に知っておくことで、途中で迷っても向かう先が分かります。

### §1.1.1 まずはゴールを知る

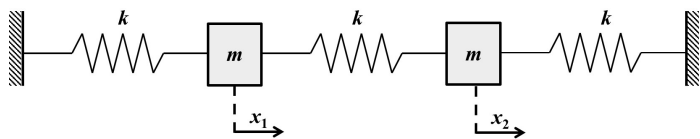
ゴールとなるのは、次の図のような機械（システム）です。



図表 1-1 質点が 2 つ

左右に壁があり、その間に 2 つの質点（質量  $m$  の物体）が並んでいます。壁と質点 1、質点 1 と質点 2、質点 2 と壁を、それぞればねでつないでいます。ばねは 3 本で、ばね定数はどれも  $k$  です。質点 1 の変位（つり合いの位置からのずれ）を  $x_1$ 、質点 2 の変位を  $x_2$  とし、どちらも右向きを正とします。摩擦は無視します。

これを今後は、床を書かず、下記のように図示します。



図表 1-2 質点が 2 つ

この 2 つの質点を横に振動させたとき、その運動を記述することが §1.1 の目標です。

序章 (§0) では、次のことを考えてきました。

「なぜ  $F = ma$  なのか」 「 $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$  とは何か」 (§0.2)

「なぜ  $a = \frac{dv}{dt}$  なのか」 (§0.3)

「 $\ddot{x} = -\omega^2 x$  を  $x$  について解く」 (§0.4)

これらは力学と微積分の分野でした。これから考えるのは、次のことです。

「質点が複数になったら、どうまとめるか」

「なぜベクトルにするのか」 「なぜ行列が現れるのか」

「互いに影響する運動を、どう分離するか」

これらが線形代数の分野です。

### §1.1.2 動くものが複数あると複雑になる

ばねと質点 1 つの場合、運動方程式は  $m\ddot{x} = -kx$  で、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  と置くと  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  となり、解は  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  でした。これからの話は、この結果を使って進めます。

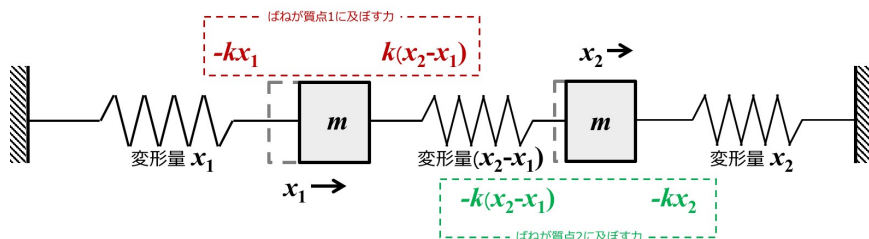
図表 1-2 では、質点は 2 つ、ばねは 3 本です。

質点 1 が釣り合いの位置から右に  $x_1$  変位し、質点 2 が  $x_2$  変位したとします。

質点 1 に働くばねの力を考えます。質点 1 が右に  $x_1$  だけ変位すると、左のばねから  $-kx_1$  の復元力を受けます。中央のばねの変形は  $x_2 - x_1$  なので、中央の

ばねから受ける力は  $k(x_2 - x_1)$  です。

まとめると、質点 1 にばねが及ぼす力は  $-kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2$  です。この様子を図表 1-3 にまとめました。図中の式は、各ばねが質点に及ぼす力を表し、右向きを正とします。力の値が負なら左向き、正なら右向きです。



図表 1-3

よって運動方程式は、 $m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2$  ...①です。

次に、質点 2 について考えます。

中央のばねから、 $-k(x_2 - x_1)$  の力を受けます。右のばねは  $x_2$  だけ縮むので、質点 2 は右のばねから  $-kx_2$  の力を受けます。よって、受けている力の合計は、 $-k(x_2 - x_1) - kx_2 = kx_1 - 2kx_2$  です。よって、運動方程式は、 $m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2$  ...②です。

①②の右辺の項を左辺に移して並べると、

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \dots③$$

$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \dots④$$

質点 1 の運動は質点 2 の変位に依存し、質点 2 の運動も質点 1 の変位に依存します。質点が 1 つのときのように「 $\ddot{x} = -\omega^2 x$  だから振動する」とは片付きません。このような状態を連成といい、この機械の振動は連成振動といいます。「一方が動くと、ばねを通じてもう一方も動く」というわけです。

この連動する関係を例えるなら、こんな状態です。同じトランポリンに 2 人が

乗ると、片方の動きが布を通じてもう片方に伝わります。高さ方向だけ見ても、一人が着地するとトランポリンが変形し、その変形がもう一人の運動にも影響します。この連動をどう扱うかが問題です。



図表 1-4 自分の動きは相手によって変わる

### §1.1.3 独立に扱う組み合わせを選ぶ

質点 1 と 2 が、それぞれどこにいるかを考えるとやっかいです。そこで、 $x_1$ 、 $x_2$  をそのまま使うのではなく、「2 つの変位の和」と「2 つの変位の差」に注目します。式で書くと、

$y_1 = x_1 + x_2$ 、 $y_2 = x_1 - x_2$  です。

式①と式②を足すと、

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = (-2kx_1 + kx_2) + (kx_1 - 2kx_2) = -kx_1 - kx_2 = -k(x_1 + x_2)$$

→  $m\ddot{y}_1 = -ky_1$  ...⑤ ( $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \ddot{y}_1$  は §0.3 「微分の線形性」 より)

式①から式②を引くと、

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = (-2kx_1 + kx_2) - (kx_1 - 2kx_2) = -3kx_1 + 3kx_2 = -3k(x_1 - x_2)$$

→  $m\ddot{y}_2 = -3ky_2$  ...⑥

⑤⑥は、質点 1 つの場合の運動方程式  $m\ddot{x} = -kx$  (§0.4.1) と同じ形です。したがって、それぞれの角振動数が求まります。

$y_1$  の角振動数は、式⑤  $m\ddot{y}_1 = -ky_1$  に基づくので、 $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  です。

$y_2$  の角振動数は、式⑥  $m\ddot{y}_2 = -3ky_2$  に基づくので、 $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$  です。

§1.1.2～§1.1.3 で行ったことを整理すると、

質点の変位  $x_1, x_2$  は連動するので、個々を求めるのはやっかいです。

「2つの変位の和」 $y_1$  と「2つの変位の差」 $y_2$  を導入すると、それぞれが独立した運動方程式になり、それぞれの角振動数を求めることができました。

### §1.1.4 行列登場

今回は、 $x_1, x_2$  をそのまま扱うのではなく、「和」 $y_1 = x_1 + x_2$  と「差」 $y_2 = x_1 - x_2$  を用いることで、連成していた運動を、独立した2つの運動として表すことができました。

では、なぜこの組み合わせを選ぶとうまくいったのでしょうか。別の問題や、質点が増えた場合にも、このやり方は通用するのでしょうか。

うまくいった理由を調べるために、もとの2本の運動方程式を行列で記述します。すると、式③④は、次のようになります。

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、次の2つを導入します。

(1)  $K$  を次のように定めます。

$$K = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

この  $K$  を剛性行列といいます。

(2)質点 1 と質点 2 の変位  $x_1, x_2$  を縦に並べたものを  $\mathbf{x}$  と書きます。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}$  の時間微分は成分ごとの時間微分を意味するので、

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

です。すると全体は

$$m\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0} \dots \textcircled{7}$$

と 1 本の式に書けます\*\*1。質点 1 つの場合の  $m\ddot{x} + kx = 0$  と、形が同じです。

**\*\*1** 質量の側も  $M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$  という行列 (質量行列) にまとめて  $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0}$  と書くのが一般的ですが、今回は 2 つの質量が等しいので、 $m$  を外に出した式 $\textcircled{7}$ の形で進めます。

### §1.1.5 「和」と「差」から現れる 2 つの運動

§1.1.3 では、 $y_1 = x_1 + x_2$ 、 $y_2 = x_1 - x_2$  という「和」と「差」を使うと、2 つの運動を独立に扱うことができました。ここで、この関係から、もとの変位  $x_1, x_2$  を求めてみます。

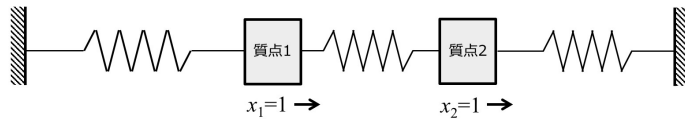
$y_1 = x_1 + x_2$ 、 $y_2 = x_1 - x_2$  なので、 $x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ 、 $x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}$  です。これをベクトルでまとめると、次のように書けます。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{y_1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

つまり、2つの質点の変位は、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形の運動と、 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の形の運動を組み合わせたものとして表せます。

第1項だけを見ると、 $x_1 = x_2$ なので、2つの質点が同じ向きに同じだけ動きます。

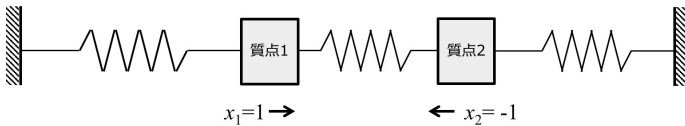
$y_2=0$ のとき 運動の形は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せる



図表 1-5  $y_2=0$ のとき

第2項だけを見ると、 $x_1 = -x_2$ なので、2つの質点が反対向きに同じだけ動きます。

$y_1=0$ のとき 運動の形は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表せる



図表 1-6  $y_1=0$ のとき

したがって、§1.1.3で「和」 $y_1$ と「差」 $y_2$ を使って運動を分けたことは、この2つの運動の形に分けたことだと分かります。では、この2つの特別な形と、行列  $K$  にはどのような関係があるのでしょうか。

まず、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に  $K$  を掛けてみます。

$$K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります。 $K$  を掛けても、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  という形は変わらず、全体が  $k$  倍されるだけです。

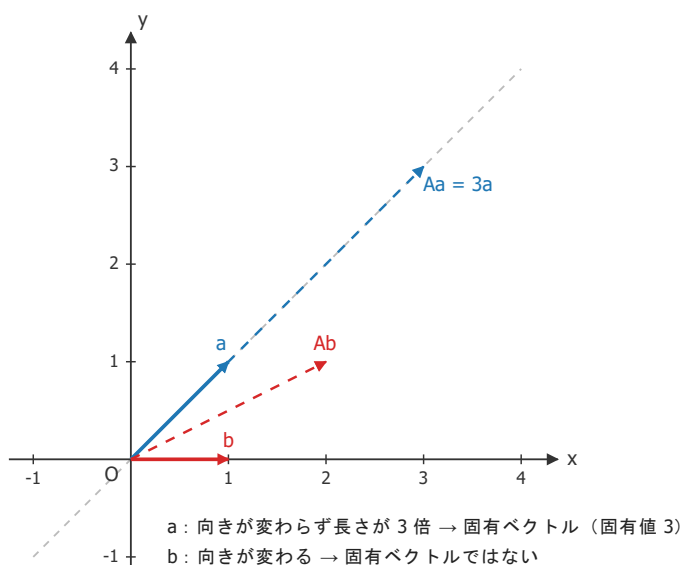
もう一方も、

$$K \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となります。こちらも、 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  という形は変わらず、全体が  $3k$  倍されるだけです。

### §1.1.6 固有値・固有ベクトル

行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  をベクトルにかけると、多くの場合そのベクトルは向きも長さも変わります。図の赤いベクトル  $b = (1, 0)$  は、 $A$  をかけると  $Ab = (2, 1)$  となり、元のベクトルの定数倍にはなっていません。一方、 $a = (1, 1)$  は、 $A$  をかけると  $Aa = (3, 3)$  となり、元のベクトルの 3 倍になっています。



図表 1-7 固有値・固有ベクトル

このように、零ベクトルでないベクトル  $a$  に行列  $A$  をかけた結果が、元のベクトルのスカラー倍になるとき、 $a$  を  $A$  の固有ベクトルといい、その倍率を固有値といいます ( $a \neq 0$ )。

固有ベクトル  $a$  と固有値  $\lambda$  の間には

$$Aa = \lambda a$$

の関係が成り立ちます。図の例は  $\lambda = 3$  です。

### §1.1.7 固有値と固有ベクトルの意味

今回の場合、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  は  $K$  の固有ベクトルで、その固有値は  $k$  です。また、 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  も  $K$  の固有ベクトルで、その固有値は  $3k$  です。

ここで重要なのは、 $K$  を掛けても、それぞれの運動の形が保たれることです。 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  に  $K$  を掛けると、その定数倍になるだけです。 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  についても同じです。

そのため、この2つの固有ベクトルを基準にして運動を表すと、それぞれの成分を別々に扱うことができます。§1.1.3で「和」 $y_1$ と「差」 $y_2$ を使ったことは、結果として、 $K$ を掛けても形が変わらない2つの方向に運動を分けていたことになります。

固有値  $k, 3k$  の方は、それぞれの運動に対するばねの強さに対応しています。運動方程式は、 $m\ddot{y}_1 = -ky_1$ 、 $m\ddot{y}_2 = -3ky_2$  でした。したがって、それぞれの角振動数は、 $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 、 $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$  となります。

つまり、 $K$  の固有ベクトルが「運動を独立に分ける方向」、固有値  $k, 3k$  が「その方向でのばねの強さ」を表しています。

では、一般の行列  $K$  について、このような固有ベクトルと固有値を計算で見つけるにはどうすればよいのでしょうか。§1.2で、この計算方法を学びます。

## §1.1 のまとめ

- 3本のばねと2つの質点でできた機械は、2つの質点の運動が連成して振動する。
- 質点それぞれの変位をそのまま見るのではなく、 $y_1 = x_1 + x_2$ 、 $y_2 = x_1 - x_2$ という「和」と「差」で見ると、2つの独立な振動として式を書くことができる。
- 行列で書くと  $m\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0}$  という、1自由度と同じ形になる。
- $K$  の固有ベクトルは「運動を独立に分ける方向」、固有値  $k, 3k$  は「その方向でのばねの強さ」を表す。

## 問題

### 問 1-1

$y_1$  に対応する運動（2つの質点が同じ向きに同じだけ動く）では、中央のばねは伸び縮みしません。この事実から、なぜ角振動数が「壁・ばね・質点1つ」の場合と同じ  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  になるのか、説明してください。

## 解答

1-1 2つの質点と同じ向きに同じだけ動くとき、中央のばねの伸び  $x_2 - x_1$  は常に 0 なので、中央のばねは力を出しません。質点 1 に働く力は左のばねの  $-kx_1$  だけ、質点 2 に働く力は右のばねの  $-kx_2$  だけになります。したがって各質点は「壁・ばね・質点 1 つ」と同じ運動方程式  $m\ddot{x} = -kx$  に従い、角振動数は  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  になります。