



わからなかった私のための

群論入門

—— ねじ・音楽・群 ——



わからなかった私のための

群論入門

—— ねじ・音楽・群 ——

表紙の菱刺しの模様にも、群が隠れています。

第3章まで読んだら、もう一度表紙を見てみてください。

答えは、あとがきにあります。

表紙・中扉 南部菱刺しをモチーフにしたデザイン

まえがき

この本は、群論をはじめて学ぶ人や、「群論の入門書を読んだけどよくわからなかった」人のための本です。

群論のわかりにくさとは、何でしょうか。海外の数学教育の研究では、群論を学ぶ学生に、結合則と交換則の区別、元と集合の区別、剰余類を一つの元として扱うこと、二つの群の同型の対応を考えることなどで、理解の難しさが報告されています。

この本では、紙の正三角形を回したり、裏返したりするところから始めます。大切なのは、「どのように動かしたか」に注目することです。同じ6つの操作を繰り返し使い、操作を図で追い、表に並べ、その規則を言葉や式で表していきます。式が分かりにくいときは、図や表に戻って見比べてください。この手間を惜しまないのが最初のコツです。

この本の特徴

一般的な数学の教科書では、集合・写像・記号・証明の読み方に、ある程度慣れていることを前提に、具体例から抽象的な定義への説明が短くまとめられることがあります。この本では、数学書に慣れていない読者が読み進めやすいように、次の部分を詳しく説明しています。

1. 定義を読む前の準備に頁を使っています。

教科書では、剰余類を $gH = \{g \circ s \mid s \in H\}$ と定義して、性質の説明へ進めます。この本では、操作を具体的に集め、組を作り、図や乗積表で確かめてから、記号による定義へ進みます。一行の定義を理解するための過程が、本

文になっています。

2. 同じ内容を、異なる表し方で確かめています。

紙の三角形、操作の図、乗積表、言葉、数式を対応させています。図表を多く配置し、具体的な操作と式の意味を見比べられるようにしています。

3. 新しい概念が必要になる理由を説明しています。

部分群で組に分けることから剰余類へ、組どうしの計算から正規部分群・商群へ進みます。うまくいく例だけでなく、うまくいかない例も扱います。定義を提示するだけでなく、「なぜこの条件が必要なのか」を確かめる構成です。

4. 証明の途中を細かく説明しています。

二つの集合が等しいことは、一方の元がすべて他方に入ることを、両側から確かめて示します。準同型定理の証明では、代表元によらないこと、演算を保つこと、違う剰余類が違う元に送られること、像のすべての元に届くことを、順に確かめます。教科書では短くまとめられる推論も、読者が追える段階に分けています。

5. 演習と解答、応用にも分量を割いています。

第6章と第10章の確認問題に加え、各章の問題と解答があります。第11章では、機械や音楽の具体例を通して、学んだ内容を別の場面で確かめます。

この本の山場と到達目標

本書で丁寧に扱う山場の一つが、操作を組に分ける「剰余類」と、その組を一つの元として計算する「商群」です。ここでは、一つ一つの操作から、操作の集まりへと、見る対象が変わります。正三角形の図と表で組み分けを確かめ、正規部分群の条件が、組どうしの計算を成り立たせることを見ていきます。同型も、

具体的な対応から意味を確かめます。

到達目標は、群論の入門における最初の到達点の一つ、準同型定理です。同値関係、剰余類、正規部分群、商群、準同型、核と像という概念が、この定理で一つにつながります。この本では、その意味を具体例で確かめ、証明までたどりま

す。

この本の使い方

用意するもの

紙で作った正三角形を1枚用意してください。作り方は第1章で説明します。手元で動かしながら読むと、図や表、式の意味を追いやすくなります。

構成と読み方

前の章の内容を使って次の章へ進むので、はじめは第1章から順に読むことを勧めます。第1章～第10章には問題と解答があり、第6章と第10章は確認問題の章です。問題は、解答を見る前に一度、自分で考えてみてください。

第11章では、機械と音楽の中に群を探します。第2章を読んだあとに、関心のある箇所へ進むこともできます。分からない用語が出てきたら、前の章や第12章の用語のまとめで確かめてください。

リンクについて

音源や、ブラウザーで動かせる教材へのリンクがあります。開くにはインターネット接続が必要です。本文の図や説明に加えて、動かしたり聴いたりして確かめられます。リンクを使わなくても、本文だけで内容は読めます。

目次

まえがき	5
第 1 章 状態から操作へ	13
§1.1 群（ぐん）ってなに？	13
§1.2 回して裏返して、群を知る	14
§1.3 正三角形を動かして集合を作る	15
§1.4 操作に注目！	17
§1.5 式の書き方	18
第 2 章 表から群へ	22
§2.1 乗積表を作る	22
§2.2 「動かして学ぶ」から、「動かさなくても分かる」へ	23
§2.3 順序を変えると結果が変わる	25
§2.4 群であるということ	26
§2.5 あれも群、これも群	28
第 3 章 群の名は	32
§3.1 群の名称と記号	32
§3.2 回転だけの群、鏡映もある群	34
§3.3 群の中に群	35
3.3.1 群の中に、まだ群	37
3.3.2 部分群にならない例	38
§3.4 生成元	38

3.4.1	正三角形の群は巡回群？	39
3.4.2	生成元の組は一通りではない	40
第4章	同値類	43
§4.1	違うのに同じ？	44
§4.2	組み分けするには	45
§4.3	時計の同値関係	46
§4.4	同値関係が成り立たないとは	47
§4.5	同値関係があると、組に分けられる	49
§4.6	時刻と操作の違い	50
§4.7	「同じ」を線でつないでみる	52
第5章	剰余類	58
§5.1	再びの乗積表	58
§5.2	部分群で観察すると	59
§5.3	部分群はどこにある	60
§5.4	剰余類	61
§5.5	表を使わず剰余類を確認する	62
5.5.1	関係が分かれば、組にできる	63
§5.6	剰余類に入る条件	64
§5.7	同値関係か確かめる	68
§5.8	同値類は全体を分ける	69
5.8.1	部分群でない場合	70
§5.9	ラグランジュの定理	70
5.9.1	部分群と剰余類の一対一対応	71
5.9.2	式①の証明	71

5.9.3	有限群	72
第 6 章	第 1～5 章の確認問題	76
剰余類戦隊 D_3		87
第 7 章	正規部分群と商群.....	94
§7.1	右剰余類の定義	94
§7.2	左剰余類と右剰余類の比較	95
§7.3	正規部分群.....	98
§7.4	剰余類を 1 つの要素として見る	100
§7.5	商群	101
§7.6	商群の意味.....	102
第 8 章	準同型.....	109
§8.1	6 つが 2 つになる	109
§8.2	変わるもの・変わらぬもの	111
8.2.1	D_3 から C_2 への写像をつくる	111
§8.3	準同型	113
8.3.1	例 1 先に r^2 、次に r	113
8.3.2	例 2 先に r 、次に f	114
8.3.3	例 3 先に f 、次に f	114
8.3.4	例 4 先に f 、次に r	114
8.3.5	準同型	115
§8.4	ショートタイムだ！ D_3	115
8.4.1	チーム N 、 fN の誕生	115
8.4.2	ショー群を作る	116

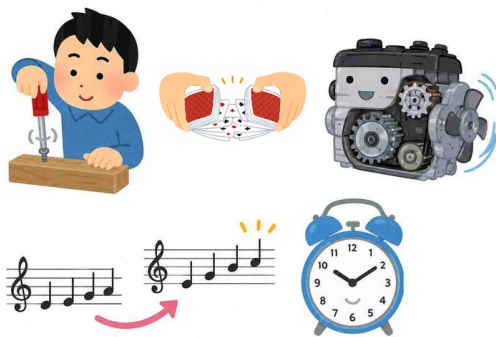
8.4.3	C_2 ランドへ	117
8.4.4	隠れた「核」	118
8.4.5	ヒーローの悩み	118
8.4.6	自然な射影	119
§8.5	核 (ker) と像 (Im)	120
8.5.1	核	121
8.5.2	像	121
§8.6	自然な射影	122
第 9 章 準同型定理		127
§9.1	核を使えば商群を作れる?	127
§9.2	「0」に来たのは、どのチーム?	130
9.2.1	計算の仕組みまで同じか	132
§9.3	準同型定理	132
9.3.1	問 8-1 で確認した例	135
§9.4	「像」はどこにある?	135
9.4.1	サイン会だ、 D_3 !	136
第 10 章 確認問題 2		143
	準備 mod (モッド) と C_n の加法	143
第 11 章 機械と音楽をつなぐ「群」		158
§11.1	歯車 — 回りて、再び出会う	158
§11.2	ねじ — 前進か後退か	160
§11.3	構造で見る、ねじと歯車	161
§11.4	音楽に現れる「群」	162

§11.5	12 音技法とシェーンベルク	167
§11.6	バッハ — 反行と逆行を駆使した作曲家	168
§11.7	違うものの中に同じものを見つける	170
§11.8	キューブを回して「群」を知ろう	171
§11.9	群論基礎クイズ	172
第 12 章 用語のまとめ		173
あとがき		183

第1章 状態から操作へ

§1.1 群（ぐん）ってなに？

ねじを回す。カードのシャッフル。エンジンの回転を歯車がタイヤに伝える。
メロディーを移調する。アナログ式の目覚まし時計をセットする。



図表 1-1 身近な操作の例

これらは一見すると別々の現象ですが、実は、共通する規則があります。どれも「ものを動かす操作」であり、操作どうしは、続けて行ったり、元に戻したりできます。こうした操作をひとまとめにしたものを群（ぐん）といい、群の性質を調べる数学を群論（ぐんろん）といいます（※群の正確な定義は、第2章で行います）。

ある操作を続けて行くとどうなるか。元に戻せるか。順序を変えると結果は同じか。群論を用いると、ものを動かす操作の規則が記述・分析できるのです。

群の「操作の規則」という見方は、日常生活を始め、物理学、化学、機械工学、暗号、音楽理論など、多くの分野で現れます。

群論は、大学の数学の中でもとっつきにくいものの代表のように思われがちですが、実は、群論を学び始めるのに、微分積分も、高度な計算も要りません。必要なのは、用語の準備がほんの少しと、定義から一步步議論を積んでいく根気だけです。前提知識のハードルは、イメージよりずっと低いのです。

では何が難しいのでしょうか。

§1.2 回して裏返して、群を知る

群論の難しさは、前提知識ではなく、抽象度にあります。そこで、この本では、紙で作った図形を回したり、裏返したり、実際に動かすことから始めます。動かしながら、その中にある規則を確かめ、定義などはあとから学んでいきます。

実物といっても、最初は、紙で作った正三角形です。この正三角形を、回して、裏返すだけ。これだけなのですが、正三角形の回転と裏返しには、群論の考え方の芽が、ひとつお入っていて、群論の基本となる「操作」「合成」「元に戻す」「順番が大切」といった考え方が自然に見えてくるのです。

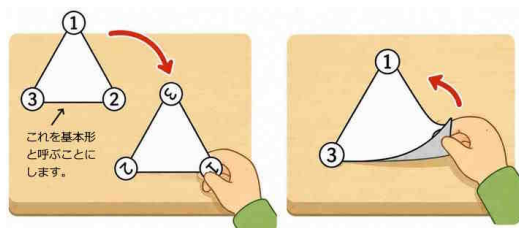
これが、次の正方形や正六角形にも、そのまま活かされます。さらには、歯車、ねじ、音楽...と広がっていきと思います。違うように見えていたことが、群でつながっていくのです。

この本では、ねじや歯車や音楽を、群論で設計・分析するなんてところまでは到達できません。しかし、群論を知ること、身の回りのものたちが、今までと違って感じられるかも...。そんな内容にしたいと思っています。

では、始めましょう。

§1.3 正三角形を動かして集合を作る

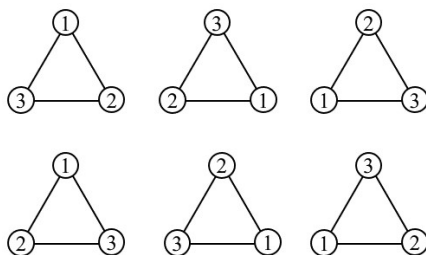
正三角形の三つの頂点に、上から時計回りに 1・2・3 と数字を振ります。数字は表だけでなく、裏面（同じ位置に同じ数字）に書いておいてください（裏返してもわかるように）。



図表 1-2 正三角形の回転と鏡映

この三角形を、机の上で回したり、裏返したりしてみましょう。回すと頂点の数字の位置が入れ替わります。裏返しても入れ替わりますね（図表 1-2）。

では、基本形とぴったり重なる置き方は、全部で何通りあるでしょうか。実際に動かして数えてみてください。数えると、6 つあります。回転で 3 つ（そのまま、 120° 回転、さらに 120° 回転）、基本形を裏返したもののたちが 3 つ（裏返したものの、裏返しを 120° 回転、さらに 120° 回転）、合わせて 6 つです。それ以上は、どう動かしても、この 6 つのどれかに戻ってきます（図表 1-3）。



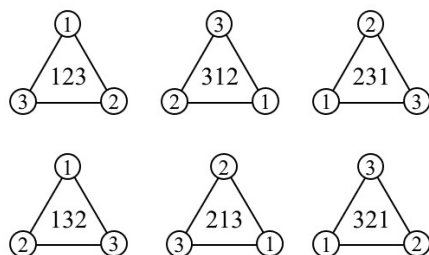
図表 1-3 6 つの状態

この6つを、数字の並びで書き表しましょう。三角形の一番上の数字から時計回りに並べると、3桁の数になります。6つの正三角形は、次の6個の数で表せるということです。これは、 $1 \cdot 2 \cdot 3$ をそれぞれ1回ずつ使ってできる、すべての3桁の数でもあります。

$$\{123, 312, 231, 132, 321, 213\}$$

この6つをひとまとめにしたものを集合といいます。これを T と名付けます。つまり、

$$T = \{123, 312, 231, 132, 321, 213\}$$



図表 1-4 6つの状態 (集合 T)

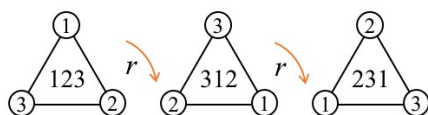
この集合 T の6つの要素を、もとの三角形の絵で一覧にしました (図表 1-4)。以降、この6つを「6つの状態」と呼ぶことにします。

図表 1-4 上段 (123・312・231) は、正三角形を 120° 時計回りに回転させて、3桁の数を作ったのでしたね。この操作を「回転」と呼ぶことにし、記号 r で表します (図表 1-5)。

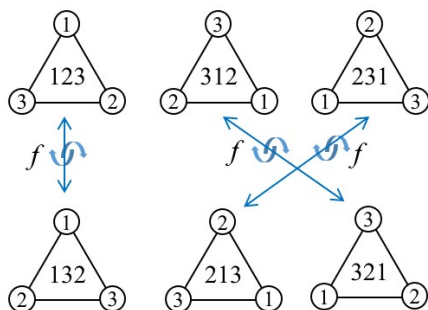
図表 1-4 下段を見てみましょう。123 と 132、312 と 321、231 と 213 というペアで比較すると、頂点を固定して左右を入れ替えたものになっています。この操作を「鏡映」と呼び、記号 f で表します (図表 1-6)。聞き慣れない言葉かもしれませんが、頂点を固定し、ひっくり返しているだけです。

回転と鏡映は、紙で正三角形を作って自分で動かしてみるのが、いちばんよくわかります。ぜひ、やってみてください。

動かす上で大事なのは、「三角形 (数字の並び)」ではなく、「三角形をどう動かしたか、操作したか」です。動かし方は、大きく 2 種類ありました。そう、回転と鏡映です。この二つを組み合わせると、6 つの状態すべてに行き着けます。



図表 1-5 回転 r による状態の移り変わり



図表 1-6 鏡映 f による状態の移り変わり

§1.4 操作に注目！

操作がわかったところで、ここからは、操作のほうに記号をつけます。回転を r 、鏡映を f 、そのままにする操作を e と書きます。以降、操作は e, r, f のように書き、状態を指すときは $[123]$ のように角括弧で書きます。集合 T の中身を並べるときは、これまでどおり括弧なしで書きます。基準は $[123]$ です。ほかの 5 つの状態は、 $[123]$ に操作を加えれば作れます。

6つの状態と6つの操作は、一つずつ対応するのです。

§1.5 式の書き方

e に 120° 時計回りの回転を加えることは、次のように書きます。

$$r \circ e = r$$

$\circ$ は「操作を加える」という意味の記号で、「まる」と読みます。 e と r の並び順に注目してください。**操作は、左側に加えます。**回転させたものをさらに回転させることは、次のように書きます。

$$r \circ r = r^2$$

操作に操作を加えることは「合成」といいます。鏡映も同様です。 e に鏡映 f を加えることは、

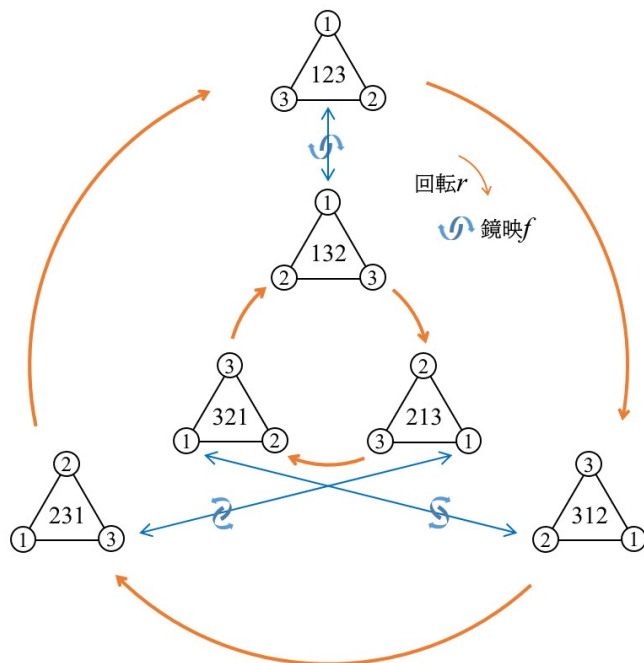
$$f \circ e = f$$

と書きます。鏡映したものを鏡映すると元に戻ります。

$$f \circ f = e$$

今後、 r^{-1} は反時計回りの回転を表し、「 $r \circ f$ 」を「 rf 」のように、「 $\circ$ 」を省略して表記することがあります。

この回転と鏡映の6つの操作を1つの図にまとめると、図表 1-7 になります。
この図はケーリーグラフといいます。



図表 1-7 内側は [132] を出発点に、回転の順に並べている。

この図から、下記の式が確認できます。

$$r \circ e = r \quad r \circ r \circ e = r^2 = r^{-1} \quad r \circ r \circ r \circ e = r^3 = e$$

$$f \circ e = f \quad r \circ f = rf \quad r \circ r \circ f = r^2 f$$

$$r^{-1} \circ f = r^2 f \quad f \circ rf = r^2 \quad f \circ r^2 f = r$$

$$r^{-1} \circ r = e \quad f \circ f = e \quad f \circ r = r^2 f$$

式で書くと、途端に面倒くさく見えますが、式を一つずつ、図表 1-7 のどこと対応するのを見ていくと、わかってくると思います。

例えば、「まず r 、続けて f 」は、 $[123] \rightarrow [312] \rightarrow [321]$ 。

「まず f 、続けて r を 2 回」も、 $[123] \rightarrow [132] \rightarrow [213] \rightarrow [321]$ 。

同じ $[321]$ に着きました。どちらも同じ動かし方をしたことになります。だから $f \circ r = r^2 f$ です。

第 1 章のまとめ

- 状態ではなく「どう動かしたか」という操作に注目する。回転を r 、鏡映を f 、何もしない操作を e とする。
- 6 つの状態には、 $e, r, r^2, f, rf, r^2 f$ の 6 つの操作が一つずつ対応する。
- 操作を続けて行うことを合成という。あとから行う操作を左に書く。
- $r^3 = e$ 、 $f \circ f = e$ 。操作には、元に戻す操作がある。
- 回転と鏡映を組み合わせるときは順序が大切。

問題

問 1-1

「まず r を 2 回 (r^2)、続けて f (鏡映)」を合成した結果は、6 つの操作のどれになるでしょうか。

解答

1-1 $f \circ r^2 = rf$

書く順番を間違えないことが大切です。操作は左に加えます。「まず r^2 、続けて f 」ですから、 r^2 の左に $\circ$ を書き、その左に f を書いて $f \circ r^2$ です。図表 1-7 でたどってみましょう。 $[123] \rightarrow [312] \rightarrow [231]$ が r^2 で、そこに f を加えると $[213]$ です。この $[213]$ は、 $[123]$ に f 、続けて r を加えた状態、つまり rf となります。

第2章 表から群へ

第1章で、操作には6つあること、この6つを合成できる（操作を続けて行うこと）を知りました。合成で大事なのは、書く順番でした。あとから行う操作は○の左側に書く、です。

第2章は、この6つ同士を合成したら、どうなるかを表にまとめることから始めます。

§2.1 乗積表を作る

6つ同士を合成する表を乗積表といいます。操作は、列が先、行が後です。6×6ですから、36マスを埋めることになります。

		列（先）					
行（後から）	○	e	r	r^2	f	rf	r^2f
	e						
	r						
	r^2						
	f						
	rf						
	r^2f						

図表 2-1

といっても、基本は3つのマスで、あとは組み合わせるだけです。3つのマスとは、次の(1)(2)(3)です。

(1) r 同士を合成する ($r \circ r$)

r を 2 回 ($r \circ r$) は r^2 。 r を 3 回 ($r \circ r^2$) も計算しておきましょう。これは、元に戻るのと同じだから、 $r^3 = e$ 。

(2) f 同士を合成する ($f \circ f$)

f を 2 回 ($f \circ f$) は元に戻るのと同じだから、 $f \circ f = e$ 。

(3) 先に r 、続けて f を合成する ($f \circ r$)

図表 1-7 から、 $f \circ r = r^2 f$

今、わかったことを、マスに書き込んでみましょう。

		列 (先)					
行 (後 から)	$\circ$	e	r	r^2	f	rf	$r^2 f$
	e						
	r		r^2	e			
	r^2						
	f		$r^2 f$		e		
	rf						
	$r^2 f$						

図表 2-2

この 3 つと、何もしない操作 e を組み合わせてマスを埋めていきます。

§2.2 「動かして学ぶ」から、「動かさなくても分かる」へ

他のマスも埋めていきましょう。

例として、「まず r^2 、続けて f 」、つまり $f \circ r^2$ のマスをやってみます。

- (i) $f \circ r^2 = f \circ r \circ r$ と分解します。
- (ii) ここで、「操作の合成では、順序を変えなければ、括弧の付け方を変えてかまわない」という法則を使います。これを結合則といいます（詳しくは、§2.4）。
- $f \circ r \circ r = (f \circ r) \circ r \dots$ ① とします。§2.1(3) の $f \circ r = r^2 f$ と、結合則を使って、置き換えていきます。
- ① $= (r^2 f) \circ r = r^2 (f \circ r) = r^2 \circ (r^2 f) = r^4 f$
- (iii) r^4 は r を 4 回。§2.1(1) から $r^3 = e$ なので、 $r^4 = r^3 \circ r = e \circ r = r$ 。よって、式 (ii) は、 $r^4 f = r f$ となります。

図表 1-7 で確かめてください（この r が 3 つ揃うと消える、 f が 2 つ揃うと消える感じ、なんかテトリスっぽいですね）。

このように、式を組み合わせ、表を完成させていきます。

行（後から）

	列（先）					
○	e	r	r^2	f	rf	$r^2 f$
e	e	r	r^2	f	rf	$r^2 f$
r	r	r^2	e	rf	$r^2 f$	f
r^2	r^2	e	r	$r^2 f$	f	rf
f	f	$r^2 f$	rf	e	r^2	r
rf	rf	f	$r^2 f$	r	e	r^2
$r^2 f$	$r^2 f$	rf	f	r^2	r	e

図表 2-3 乗積表

これが完成した乗積表です。ケーリー表ともいいます。

自分で埋めた表と見比べてください。違っていたら、どこで食い違ったかを追うのが一番の勉強になります。ここが「動かして学ぶから、動かさなくても分かる」への大事なポイントになります。

§2.3 順序を変えると結果が変わる

乗積表を観察すると、こんなことが見えてきます。

○	e	r	r^2	f	rf	r^2f
e	e	r	r^2	f	rf	r^2f
r	r	r^2	e	rf	r^2f	f
r^2	r^2	e	r	r^2f	f	rf
f	f	r^2f	rf	e	r^2	r
rf	rf	f	r^2f	r	e	r^2
r^2f	r^2f	rf	f	r^2	r	e

九九	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

図表 2-4 左：乗積表（重ならない） 右：九九（重なる）

(1) どのマスも、6つの中にある

どのマスも e 、 r 、 r^2 、 f 、 rf 、 r^2f 以外の記号は、ありません。どの操作とどの操作を組み合わせても、6つの外には出ないのです。

(2) どの行にも、どの列にも、6つが1回ずつ

順番は違っても、 e 、 r 、 r^2 、 f 、 rf 、 r^2f が、必ず全部1回ずつ現れます。列も同じです。数独やパズルの表と同じ形をしています。

ここで重要なのが、「どの行にも、必ず e がある」ということです。それは、合成した操作に、何かを合成すれば、基本形に戻せる、ということです。

rf の行を見てください。 e があるのは rf の列です。つまり $rf \circ rf = e$ 。 rf を 2 回やれば元に戻る、ということです。

(3) 折り返しても、重ならない

表の左上から右下へ対角線を引いて、折り返してみます (図表 2-4)。九九の表なら、これでぴったり重なります。 3×5 も 5×3 も 15 だからです。乗積表は重なりません。

かけ算は順序を変えても答えは同じですが、この群では結果が変わる。「順序が大事」という意味が乗積表からも見えます。とは言っても、全く重ならないわけではなく、左上の e, r, r^2 だけの範囲は折り返すと重なります。回転どうしなら順序を変えても同じです。鏡映が入ると、順序が大事になるというわけです。

§2.4 群であるということ

第 1 章で、群とは「操作をひとまとめにしたもの」と書きました。それが、今行った、6 つの操作と、操作を続けて行う (合成する) です。この仕組みを持つ集まりを群といいます。

群であるための条件は次の 4 つです。

(1) 組み合わせた結果が閉じている

表の中身が 6 つだけ、ということです。

(2) 何もしない操作がある

e のことです。この操作を単位元といいます。 e は、どの操作に合成しても相手を変えません。

(3) どの操作にも、打ち消す操作がある

どの操作にも、それと合成すると e になる操作があるということです。この打ち消す操作を、もとの操作の逆元といいます。この乗積表では、各行・各列に e が1つずつ現れることから確認できます。

(4) 結合則が成り立つ

操作を3つ続けるとき、順序を変えなければ、どこから先にまとめても結果は同じです $((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z))$ 。

操作を写像として表し、その合成を演算とすると、結合則は必ず成り立ちます。そのため、操作の集まりが群になるかを調べるときは、残りの3条件を確かめれば足ります。結合則は「まとめ方を変える」だけで、順序は変えていません。「順序を変えてよい」というのは交換則で、それとは別のものです。

正三角形の操作は、条件(1)～(3)をすべて満たしています。(4)の結合則は操作の合成で必ず成り立つので、群です。

群には名前があり、この正三角形を動かして作った群は D_3 といいます。要素の数を位数（いすう）といい、「 D_3 の位数は6である」というような言い方をします（群の名前については、次章で整理します）。

ここで、大事ななのは、群になるのは、操作だということです。できあがった状態のほうではありません。いま作った群 D_3 は、6つの**操作**の集まりで、第1章で作った集合 T は、6つの**状態**の集まりでした。どちらも6つで同じように見えますが、操作は合成できますが、状態は合成できません。この違いが重要です。

§2.5 あれも群、これも群

群が定義できたので、第1章「群ってなに？」で挙げた例がどんな群なのか見ていきましょう。

時計

目覚まし時計の針を「3時間進める」「5時間戻す」。この操作の集まりを考えます。組み合わせても12時間の世界から出ません（条件(1)）。何もしない操作があります（条件(2)）。進めた分は、戻せます（条件(3)）。3条件を満たしています。群です。しかもこの群は、順序を変えても結果が同じです。3時間進めてから5時間進めるのも、5時間進めてから3時間進めるのも、8時間進める。正三角形とは違って、ここでは順序が問題になりません。もう一つ、正三角形と違うところがあります。正三角形は、回転と鏡映という2種類の操作がありましたが、時計の操作の群は、すべて「1時間進める」の繰り返しでできています。3時間進めるのは、1時間進めるを3回。12回で元に戻ります。たった一つの操作を繰り返すだけで、12の操作が全部出てくるのです。

正六角形

正三角形と同じ方法で数えられます。回転が6 (0° 、 60° 、 120° 、 180° 、 240° 、 300°)。鏡映が6。合わせて12です。正三角形は、回転3と鏡映3で6でした。正六角形は12。 n 角形なら、回転が n 個、鏡映が n 個で、合わせて $2n$ になります。角の数が増えれば、群も大きくなる。図形の対称性の高さが、そのまま群の大きさになっています。

歯車

歯数60の歯車を考えます。1歯分 (6°) 回すと、元の歯車と重なります。2歯、3歯でも同じです。60歯回すと一周して元通り。時計と同じ作りです。「1歯分」の繰り返しで、60個の操作が出てきます。数が12から60に変わるだけ。

歯車の歯数は「回転の速さや伝える力を決める」要素ですが、群で見ると、「歯車を持つ対称性の大きさ」なのです。

並べ替え

第1章で、6つの状態を「 $1 \cdot 2 \cdot 3$ をそれぞれ1回ずつ使ってできる、すべての3桁の数」と説明しました。これは、3つのものを並べ替えるすべての方法、そのものです。並べ替えも群になります。組み合わせても3桁の数のまま。何もしない並べ替えがあります。並べ替えたものは元に戻せます。あみだくじも群として考えることができます。この乗積表を作ると、正三角形の群と同じ形になります。正三角形を動かす話と、数字を並べ替えること、見かけは違っても群として見れば同じもの。これが、「違うように見えていたことが、群でつながっていく」のです。

第2章のまとめ

- 群の条件は4つある。操作の合成を演算とする場合、結合則は必ず成り立つので、残る3条件「閉じている」「何もしない操作がある」「どの操作にも打ち消す操作がある」を確かめればよい。
- 群に含まれる要素の個数を、その群の「位数」という。
- 正三角形の6つの操作の群を D_3 という。 D_3 の要素は6個なので、 D_3 の位数は6。6つの状態の集合 T とは区別する。
- D_3 では操作の順序を変えると結果が変わることがある。つまり交換則は一般には成り立たない。

問題

問 2-1

図表 2-3 を使って、 $f \circ r^2$ を教えてください（どちらが先で、どちらが後でしたか）。

問 2-2

rf を打ち消す操作は何ですか。 rf を施したあと、何を施せば基本形 e に戻りますか。

問 2-3

正正方形を動かして、元の位置にぴったり重なる方法は、全部でいくつありますか。回転と鏡映に分けて数えてください。

Column 「ねじ・音楽・群」という副題

この本の副題が「ねじ・音楽・群」なのは、ねじも音楽も、群として見る事ができるからです。ねじは、上から見た姿に対称性があります。二条ねじなら半回転で重なる。歯車と同じ作りです。音楽の移調は、時計の針を進めるのと同じ作りです。半音ずつ上げていくと、12回で元の音名に戻ります。音の上下をひっくり返す反行は、2回で元に戻る。正三角形の鏡映と同じです。そして、反行してから移調するのと、移調してから反行するのでは、結果が違うことがあります。順序が大事、というあの話が、音でも起こるのです。第 11 章で、あらためて取り上げます。

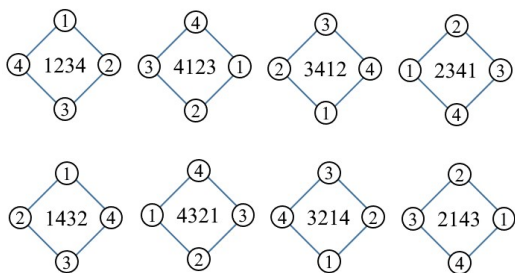
解答

2-1 *rf*

2-2 *rf*

2-3 回転 4、鏡映 4 の計 8。

正三角形と同様に、正方形の頂点に 1234 の数字を振ったものを考えます。



図表 2-5

この正方形を回転と鏡映させてできる数字のならびは、

$\{1234, 2341, 3412, 4123, 1432, 2143, 3214, 4321\}$ の 8 通りです。

第3章 群の名は

第3章は、§2.4 で書いた「群には名前があり」という話から始めます。そして、乗積表（図表 2-3）を、再び観察し、表の中に隠れている小さな群を見つめます。

§3.1 群の名称と記号

巡回群

時計は「1 時間進める」という操作ひとつを繰り返すだけで、12 個の操作が全部出てきました。12 回繰り返すと元に戻ります。歯車は「1 歯分」の繰り返して、操作は全部で 60 個でした。このように、一つの操作の繰り返しだけで全部の操作が出てくる群を巡回群といい、 C_n と書きます。添字の n は、操作の個数、つまり位数です。なので、時計は C_{12} 、歯数 60 の歯車は C_{60} となります。

§2.5 で、歯車は「時計と同じ作りです」と書いた話は、群の名称を使って書き換えると、「時計と歯車は巡回群という同じ作りの群だ」ということだったので

二面体群

正 n 角形を動かして元の位置に重ねる操作の集まりを二面体群といい、 D_n と書きます。正三角形の群は D_3 、正六角形の群は D_6 です。添字の n は n 角形の n です（巡回群の n とは違うので注意してください）。第2章で数えたとおり、正 n 角形には回転が n 個、鏡映が n 個ありますから、位数は $2n$ になります。

- D_3 ... 正三角形。位数は 6
- D_4 ... 正方形。位数は 8 (問 2-3 で数えたとおりです)
- D_6 ... 正六角形。位数は 12

置換群

n 個のものを並べ替えるすべての方法の集まりを置換群**1 といい、 S_n と書きます。第 1 章で「 $1 \cdot 2 \cdot 3$ をそれぞれ 1 回ずつ使ってできる、すべての 3 桁の数」と言っていたものは、 S_3 となります。添字の n は、並べ替える対象の個数です。位数はいくつかというと、 n 個を一行に並べる方法の数ですから、 S_3 の位数は $3 \times 2 \times 1 = 6$ 、 S_4 の位数は $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ となります。

****1** S_n は「対称群」とするのが正確ですが、二面体群 D_n を「正 n 角形の対称操作の群」としている教科書もあり、どちらにも「対称」が入って紛らわしいので、この本では、 S_n を「置換群」ということにします。

群の名称と添字のまとめ

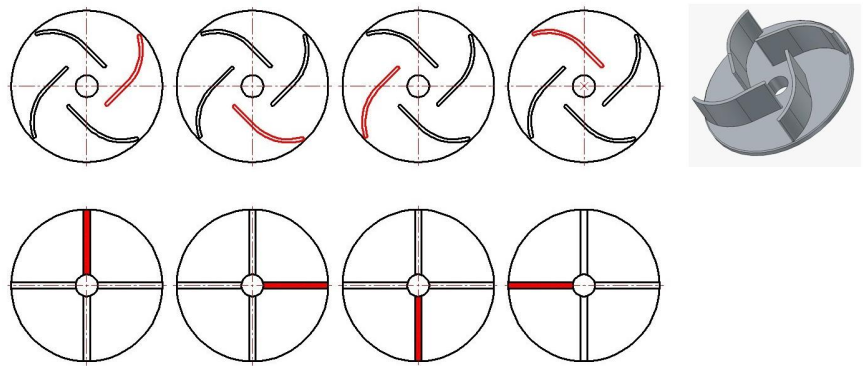
添字 n は、群によって意味が変わるので表にまとめました。

群の名称	記号	添字 n の意味	位数
巡回群	C_n	位数そのもの	n
二面体群	D_n	n 角形の n	$2n$
置換群	S_n	並べ替える対象の個数	$n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$

図表 3-1

§3.2 回転だけの群、鏡映もある群

C_4 と D_4 の違いを、図で見てください。

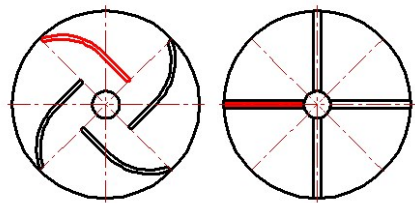


図表 3-2 上段：ポンプの羽根車 下段：十字のスポーク

図表 3-2 の上段はポンプの羽根車です。羽根が 4 枚、同じ向きに反っています。下段は十字のスポーク。どちらも 90° 回すと元の形に重なります。赤い印で、その様子を追ってください。

回転については、上下に差がありません。どちらも 90° 、 180° 、 270° 、そして元に戻る、の 4 つです。

では、折り返してみましょう。縦・横・斜め 45° の 4 本の軸を引きます。



図表 3-3 左：羽根車 右：十字スポーク

十字スポーク（右）は、4本のどの軸で折り返しても重なります。回転4つに鏡映4つが加わって、位数は8。 D_4 です。

羽根車（左）は、羽根の反りが逆だからどの軸で折り返しても重なりません。折り返すと、羽根の反りが逆向きになってしまいます。鏡映が一つもないのです。回転4つだけで、位数は4。 C_4 です。

羽根車の羽根は、流体を外へ送り出すため反っています。羽根は軸の釣り合いのために、等角度（等ピッチ）で配置されます。反りが鏡映を消し、等角度配置が「90°回転で重なる」を残す。残った4つの回転が C_4 です。機械の部品には、こういう形が数多くあります。

§3.3 群の中に群

乗積表（図表 2-3）を思い出しましょう。

		列（先）					
行（後から）	e	e	r	r^2	f	rf	r^2f
	e	e	r	r^2	f	rf	r^2f
	r	r	r^2	e	rf	r^2f	f
	r^2	r^2	e	r	r^2f	f	rf
	f	f	r^2f	rf	e	r^2	r
	rf	rf	f	r^2f	r	e	r^2
	r^2f	r^2f	rf	f	r^2	r	e

図表 2-3 乗積表

§2.3で、こう書きました。「全く重ならないわけではなく、左上の e 、 r 、 r^2 だけの範囲は折り返すと重なります」。

この左上の部分をもう一度取り出してみましょう。

$\circ$	e	r	r^2
e	e	r	r^2
r	r	r^2	e
r^2	r^2	e	r

図表 3-4

9マスの中に、 e 、 r 、 r^2 の3つしか出てきません。 f も rf も r^2f も、一つもありません。結合則は操作の合成で成り立つので、残る3条件に照らし合わせてみましょう。

(1) 組み合わせた結果が閉じている。

9マスの中身が e 、 r 、 r^2 の3つだけ。

(2) 何もしない操作がある

e が入っている。

(3) どの操作にも、打ち消す操作がある

どの行にも e が1つある。

$\{e, r, r^2\}$ は3条件を全部満たしています。ということは、これは、群なのです。

このように、群の一部を取り出したものが、群になっているとき、これを部分群といいます。 $\{e, r, r^2\}$ は D_3 の部分群なのです。

回転だけを集めたものですから、これは「120°回転を繰り返すだけで全部出てくる」群、つまり C_3 です。 D_3 の中に C_3 が入っている、ということになります。

3.3.1 群の中に、まだ群

実はもっと群がひそんでいます。 $\{e, f\}$ に注目してください。

$\circ$	e	f
e	e	f
f	f	e

図表 3-5

e と f しか出てきません。 e があります。どの行にも e があります。3 条件を満たしています。 $\{e, f\}$ も部分群です。位数は 2 です。

え、もっとあるって？ あなた、さすがですね！

$\circ$	e	rf
e	e	rf
rf	rf	e

$\circ$	e	r^2f
e	e	r^2f
r^2f	r^2f	e

図表 3-6

そう、 $\{e, rf\}$ と $\{e, r^2f\}$ も部分群です。 $rf \circ rf = e$ 、 $r^2f \circ r^2f = e$ ですから、どちらも同じ形の 4 マスになります（問 2-2 で rf を打ち消す操作を探してもらったのが、ここで効いてきます）。

この 3 つ $\{e, f\}$ 、 $\{e, rf\}$ 、 $\{e, r^2f\}$ は、どれも同じ形をしています。位数 2 で、2 回繰り返すと e に戻る。巡回群 C_2 です。

まだ、あと 2 つあるんですよ。見落としがちな部分群が。それは...

- $\{e\}$... e ひとつだけ。 $e \circ e = e$ ですから、3 条件を満たします。位数 1 の部分群です。

- $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$... 全部です。 D_3 自身も、 D_3 の部分群です。

部分群	$\{e\}$	$\{e, f\}$	$\{e, rf\}$	$\{e, r^2f\}$	$\{e, r, r^2\}$	D_3 全体
位数	1	2	2	2	3	6

図表 3-7

まとめると、 D_3 の部分群は全部で 6 つあります。

「田という字の中に四角は何個ある？」というクイズがありますが、部分群はそれを思い出させます。

3.3.2 部分群にならない例

念のため、うまくいかない例も見ておきます。 $\{e, r\}$ はどうでしょうか。

$r \circ r = r^2$ です。 r^2 は $\{e, r\}$ の外です。条件 (1) に反します。 $\{e, r\}$ は部分群ではありません。

$\{e, r, f\}$ はどうか。 $f \circ r = r^2f$ 。これも外です。部分群ではありません。

適当に切り取っても部分群にはならない、ということです。ここが大事なところで、部分群になれる集まりは、かなり限られています。上の表を見ると、位数は 1、2、3、6 の 4 種類しかありません。4 や 5 の部分群は、 D_3 には一つもないのです。

なぜ 4 や 5 がいないのか。これには理由があります。ただし、それを説明するには剰余類（第 5 章）という道具が要ります。

§3.4 生成元

§2.5「時計」の所で、こう書きました。「たった一つの操作を繰り返すだけで、12 の操作が全部出てくる」。

この「たった一つの操作」には名前があります。生成元（せいせいげん）とい
います。その繰り返して群の全部の操作が作れるような操作のことです。時計の
 C_{12} なら「1 時間進める」が生成元です。歯車の C_{60} なら「1 歯分回す」が生成
元です。

群によっては、1 つでは足りず、2 つ以上を組み合わせることで全部を作ることあ
ります。その場合は、その組を生成元の組といいます**2。

巡回群というのは、要するに生成元が 1 つで足りる群のことです。

**2 2 つ以上のときは、繰り返しだけでなく、合成も使って作ります。

3.4.1 正三角形の群は巡回群？

正三角形の群 D_3 はどうでしょうか。 r を繰り返してみます。

$$r \rightarrow r^2 \rightarrow r^3 = e$$

3 回で終了です。 f が出てきません。回転をいくら繰り返しても、裏返しには
ならない（当たり前！）。

では f ならどうか。 f 、 $f \circ f = e$ 。2 回で終了です。 rf でも試してみます。
 $rf \circ rf = e$ でしたから、これも 2 回で終わりです。残りの 3 つも同じです。 r^2
は繰り返すと r^2 、 r 、 e 。回転の 3 つだけで、やはり f は出てきません。 $r^2 f$
は 2 回で e 。 e は、何回繰り返しても e のままです。

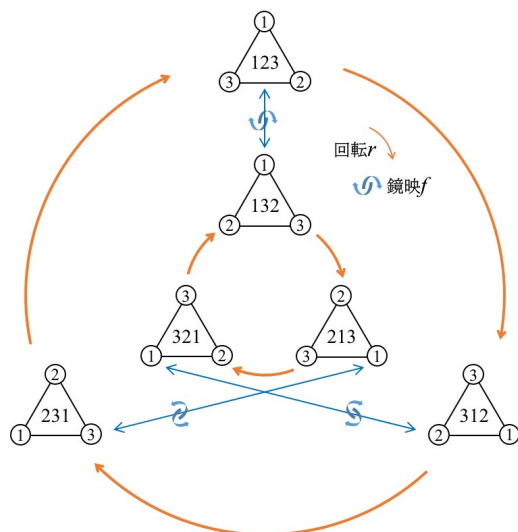
つまり、 D_3 の 6 つの操作のどれを選んでも、それ一つの繰り返しでは全部は
出てきません。 D_3 は巡回群ではないということです。

では、2 つならどうか。 r と f の 2 つを使えば、

$$e, r, r^2, f, r \circ f = rf, r^2 \circ f = r^2 f$$

6 つ全部が出てきます。図表 1-7 が、まさにこれを描いた図です。オレンジの
矢印（ r ）と青の矢印（ f ）だけで、6 つの状態を全部たどれます。

このことを、 D_3 は r と f で生成されるといいます。 r と f が D_3 の生成元です。



図表 1-7

3.4.2 生成元の組は一通りではない

生成元の選び方は、一通りとは限りません。

r と rf の 2 つでも試してみます。図表 2-3 を使います。

r 、 r^2 、 $r^3 = e$ 、 rf 。

rf に r を合成すると、図表 2-3 の r の行・ rf の列で、 $r \circ rf = r^2f$ 。

さらに r を合成すると、 r の行・ r^2f の列で、 $r \circ r^2f = f$ 。

これで 6 つ揃いました。 r と rf でも D_3 は生成できます。

生成元というのは「その群にただ一つ決まっているもの」ではなく、「これだけあれば全部作れる」という組み合わせのことです。少ない部品で全体を組み立

てる、その部品セットだと思ってください。

では、今一度、図表 2-3 を生成元に注目して見直してみてください。

第 3 章のまとめ

- 巡回群 C_n (位数 n)、二面体群 D_n (位数 $2n$)、置換群 S_n (位数は n から 1 までの積)。添字の意味は 3 種類とも違う。
- 群の一部を取り出して、それだけで群になっているものを部分群という。
- D_3 の部分群は 6 つ。位数は 1、2、3、6。
- その繰り返しで全部が作れる操作 (の組) を生成元という。生成元 1 つで足りる群が巡回群。
- D_3 は 1 つの操作だけでは作れない。だから巡回群ではなく、生成元が 2 つ要る。

問題

第 3 章はたくさんの専門用語が出てきました。問題で確認しましょう。

問 3-1

D_4 (正方形の群) の位数はいくつでしょうか。 C_4 の位数と比べてください。

問 3-2

図表 2-3 を使って、 $\{e, r^2\}$ が部分群かどうか判定してください。

問 3-3

時計の群 C_{12} の中に、「3 時間進める」の繰り返しでできる部分群があります。何個の操作からなるでしょうか。

解答

3-1 D_4 の位数は 8、 C_4 の位数は 4。

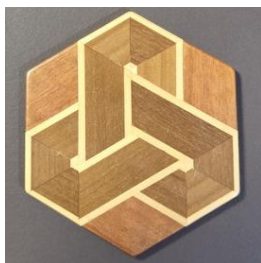
3-2 部分群ではない。

$r^2 \circ r^2 = r$ で、 r は $\{e, r^2\}$ の外に出ます。

3-3 4 個

0 時間、3 時間、6 時間、9 時間

Column



図表 3-8

これは、組木細工のコースターです。群の分類でいうと、何になると思いますか？ 内部模様を含めると C_3 と言えるのではないのでしょうか。コースターの美しさの秘密に、群論が言葉を与えてくれたような気がしています。

第4章 同値類

第3章で、 D_3 に要素が4個や5個の部分群が一つもないことを説明するには、剰余類という道具が要ると書きました。第4章は、その剰余類のさらに土台になる話です。その話は、「同じ」とは何か、というところから始まります。

まず、図表4-1のりんごを見てください。左は写真、中央は元の写真を5段階の白黒階調に変換したもの、右はデッサンです。



図表4-1 りんごの写真、5段階の白黒階調、デッサン

りんごの表面には、さまざまな赤があります。光が強く当たるところもあれば、影になっているところもあります。細かな模様や色の変化もあります。

画家がデッサンするとき、見える情報（形、色、光、影、など）すべてを描き写すわけではありません。細かな色の違いをいったん置いて、「明るい」「中間」「暗い」という大まかな明暗に分けて見ることがあります。光がどこから当たっているのか、りんごの面がどちらを向いているのかを見ながら、「ここは明るい」「ここから暗くなる」と整理していきます。中央の図は、元の写真を5段階の白黒階調に変換したのですが、このような見方をしてみるということですよ。明暗を、なんとなく分けているのではないのです。

できあがったデッサンは、赤い色はないのに、「りんご」ですね。それは、りんごの、丸み、光の反射、影はしっかり描かれているからです。

つまり画家は、色や光の情報をある基準をもって、「ここここは同じ明るさ」というような省略を行っているのです。細かな違いを省略して、必要な特徴を残しているから、鉛筆の線の集まりが、「りんご」に見えるのです。

数学でも、これと似たことをします。「同じ」と呼べるものは何か、どこまでの違いなら、「同じ」として扱えるのか。

「同じ」という言葉を、私たちは当たり前のように使っています。そのたびに「何を基準にして同じと言っているのか」と考え直すことは、ほとんどありません。

数学では、その基準をはっきりさせます。基準を間違えると、話が成り立たなくなります。

では、群論における「同じ」とは何か、見ていきましょう。

§4.1 違うのに同じ？

「2 と 14 は同じですか？」と聞かれたらなんと答えますか？ 数としては違います。しかし、時計の 2 時と 14 時だとどうでしょう。時計の上では、針は同じところを指します。



図表 4-2 2 時を示す時計

14 時 25 分のことを、2 時 25 分と言い換えることも何気なくやっています。

なぜ、あるときは、「2 と 14 は違う」となり、あるときは「2 と 14 は同じ」と言えるのでしょうか。

それは、時間を考えるとき、12 の倍数とどれだけ違うかで組み分けしているからです。数式で書くと、ある数 x, y を引き算したとき、結果が 12 の倍数になるということです。 $x = 2, y = 14$ としましょう。 $x - y = 2 - 14 = -12$ (12 の -1 倍)。よって、2 と 14 は、時計の見方というルールの下で「同じ」です。0 時から 23 時までのすべてについて、私たちはこれをほぼ意識することなく計算しています。

注意したいのは、2 と 14 が等しくなったわけではないことです。等しくないまま、「差が 12 の倍数」というルールの下で「同じ」と呼んでいるのです。そして、「同じ」と呼べるものをまとめれば、組ができます。ルールを決めると、組み分けできるのです。

§4.2 組み分けするには

では、どのようにルールを決めたら組み分けできるのでしょうか。組は、仲間はずれや例外はあってはなりません。そのように作るためには、次の三つのことが成り立っている必要があります。

次の三つの性質を満たす関係を、**同値関係**といいます。

(1) 反射律

x と x の間には、常に「ある関係」が成り立つ。言い換えると、自分自身にも、「ある関係」が成り立つ。

(2) 対称律

x と y の間に「ある関係」が成り立つなら、 y と x の間にも「ある関係」が

成り立つ。

(3) 推移律

x と y の間に「ある関係」が成り立ち、さらに y と z の間にも「ある関係」が成り立つなら、 x と z の間にも「ある関係」が成り立つ。

この3つをまとめて三律と呼ぶことにします。ここで、 x, y, z は、関係を調べる対象を表します。今回の時計の例では、時刻を表す整数です。

これらは一見すると当たり前の性質に見えます。しかし、あるルールの下で対象が組み分けされるためには、この三つ（同値関係）を検証する必要があります。

§4.3 時計の同値関係

時計における「同じ時刻」を、次のように決めます。

「二つの時刻 x, y の差 $x - y$ が12の倍数であるとき、かつ、そのときに限り、 x と y は同じ時刻である（12時間制で）」

式では $x - y = 12n$ (n は整数) と表します。

では、同値関係を検証していきます。

(1) 反射律

どの時刻 x についても、 $x - x = 12 \times 0$ 。12の倍数になっているので、 x と x は同じ時刻です。よって、反射律は成立します。

(2) 対称律

x と y が「同じ時刻」であるとしします。このとき、 $x - y = 12n$ と表せます。 x と y を入れ替えると、 $y - x = -(x - y) = -12n$ 。12の倍数になっているので、 y と x は「同じ時刻」です。つまり、対称律は成立します。

(3) 推移律

x と y が同じ時刻であり、さらに y と z も同じ時刻であるとします。このとき、ある整数 n, m を使って、 $x - y = 12n$ 、 $y - z = 12m$ と表せます。二つの式を足すと、 $(x - y) + (y - z) = x - z = 12n + 12m = 12(n + m)$ 。 $n + m$ も整数なので、 $x - z$ は 12 の倍数です。よって推移律は成立します。

よって、三つの性質がすべて成立するので、「差が 12 の倍数である」という関係は同値関係です。この関係を使って、実際に整数全体を組み分けしてみるのが、§4.5 です。

§4.4 同値関係が成り立たないとは

「同値関係」が成り立たない場合を検証すると、同値関係がより理解できます。

ある学校の生徒たちを「年齢の差が 1 歳以内なら同じ組」とするルールを考えます。

ルールの定義：「生徒 a と生徒 b の年齢の差が 1 歳以内である」

さて、このルールは、生徒たちを漏れなく、重なりなく、組み分けできるルールでしょうか。検証していきましょう。

反射律：自分自身との年の差は 0 歳なので、年の差は 1 歳以内といえる。→成立

対称律： a 君は b 君と 1 歳以内である。ならば、 b 君は a 君と 1 歳以内である。→成立

推移律： $a = 15$ 歳、 $b = 16$ 歳、 $c = 17$ 歳とすると、 a 君と b 君の差は 1 歳以内、 b 君と c 君の差は 1 歳以内、しかし、 a 君と c 君の差は 1 歳以内ではな

い。→不成立。

よって、このルールは同値関係ではなく、年齢差が1歳以内という条件だけでは、「ある学校の生徒たち」を重ねない組に分けることはできません。

同値関係の3つの律（反射律・対称律・推移律）が成り立たない代表的なケースを、「 a と b が○○の場合（関係）」という形で整理すると、

1. a と b が「順序・大きさ」の関係の場合（比較）

例 $a < b \rightarrow$ 反射律、対称律が成立しない。

2. a と b が「近似・誤差の範囲内」の関係の場合

例 誤差が1以内 $\rightarrow$ 推移律が成立しない。

3. a と b が「共通点・交わりがある」関係の場合

例 直線 a と直線 b が交わり、直線 b と直線 c が交わっても、直線 a と直線 c が交わるとは限らない $\rightarrow$ 推移律が成立しない。

などがあります。

3つの律がすべて綺麗に成り立つ「同値関係」というのは、実はかなり特殊で強力な条件です。3つが揃って初めて、要素を重ねりなく、余りなく組み分けできます。なぜ3つが揃うとそう言えるのかは、第5章で確かめます。

§4.5 同値関係があると、組に分けられる

時計に戻ります。整数全体を、「差が12の倍数なら同じ」で分けてみます。

0の組	...	-24	-12	0	12	24	...
1の組	...	-23	-11	1	13	25	...
2の組	...	-22	-10	2	14	26	...
3の組	...	-21	-9	3	15	27	...
4の組	...	-20	-8	4	16	28	...
5の組	...	-19	-7	5	17	29	...
6の組	...	-18	-6	6	18	30	...
7の組	...	-17	-5	7	19	31	...
8の組	...	-16	-4	8	20	32	...
9の組	...	-15	-3	9	21	33	...
10の組	...	-14	-2	10	22	34	...
11の組	...	-13	-1	11	23	35	...

図表 4-3 整数を差が12の倍数になる12組に分けた表

図表 4-3 の「0 の組」は、時計では12時の位置に対応します。0 と12の差も12の倍数だからです。

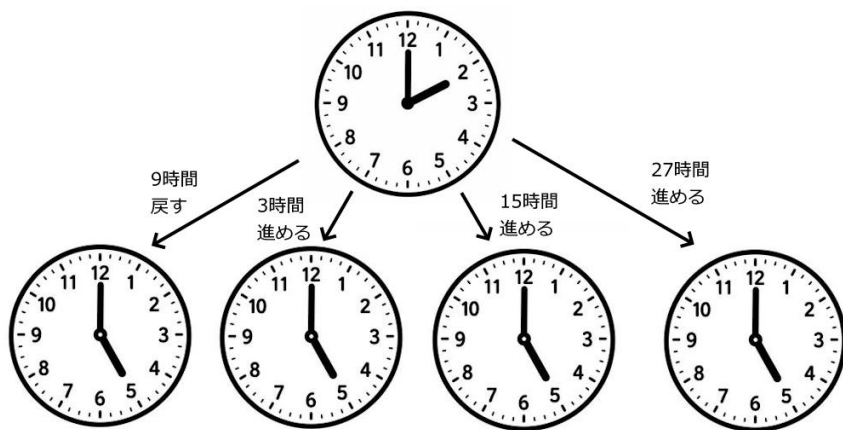
12組できました。整数全体が、重なりなく、余りなく、組に分けられました。これを**類別**といい、できた組の一つ一つを**同値類**といいます。

第3章で、時計の群は C_{12} であると言いました。「1時間進める」という操作を12回繰り返すと元に戻る、12個の操作でできた群です。

この12個のうち、「3時間進める」を考えてみます。2時に合わせた時計の針を3時間進めると、5時を指します。では15時間進めたらどうでしょうか。27時間進めても、9時間戻しても、5時です。

2時である必要はありません。何時から始めても、3時間進めても、15時間進

めても、27 時間進めても、9 時間戻しても、結果は同じです。進める時間数の差が 12 の倍数なら、針は同じところに来る。「3 時間進める」と「15 時間進める」は、時計の操作としては区別がつかないのです。



図表 4-4 異なる時間だけ動かしても同じ 5 時になることを示す図

§4.6 時刻と操作の違い

ここで注意してほしいことがあります。

この第 4 章の最初で取り上げた「2」と「14」は、時刻でした。今の、「3 時間進める」「15 時間進める」の「3」や「15」は、操作の大きさです。同じ整数ですが、表しているものが違うのです。

関係のほうは、どちらも「差が 12 の倍数」で同じです。ですから、できる組も同じ 12 組になります。この 12 組を時刻として読めば、文字盤の 12 個の位置。操作の大きさとして読めば、時計を動かす 12 種類の操作です。

「違うのはわかったけど、結局 12 なんだから、どっちでもいいんでしょ」。違

います。はっきり区別しなければなりません。

違いは、合成できるかどうかです。

時刻は、ただの 12 個の位置 (状態) です。「2 時」と「5 時」を合成することはできません。一方、「3 時間進める」と「5 時間進める」は合成できて、「8 時間進める」になります。

ですから、時計の群 C_{12} とは、操作の 12 組であって、時刻の 12 組ではないのです。時刻は、群ではなく、群が動かす対象です。

第 1 章で、操作は e, r, f と書き、状態は $[123]$ のように角括弧で書き分けました。状態と操作は、区別しなければならないのです。



図表 4-5 2 時と 5 時の合成？

そう見ると、「3 時間進める」という操作は、3 という数だけを指すのではなく、 $\dots, -9, 3, 15, 27, \dots$ というひとかたまり全体を指していることになります。これは、図表 4-3 の 3 の組そのものです。

12 個の同値類は、時計を動かす 12 種類の操作と一つずつ対応しています。そこで、それぞれの同値類を、操作の名前として使うことができます。

§4.7 「同じ」を線でつないでみる

同値関係と同値類を、図で見てください。

図表 4-6 ①のようなシフォンケーキを、同じような切り方で3等分するとします。イメージが湧かない方は、第4章のまとめにある図表 4-9 をご覧ください。

図表 4-6 ②のように、内側の三角形の頂点と、外側の円周を 120° ずつに分けた位置に点をつけます。

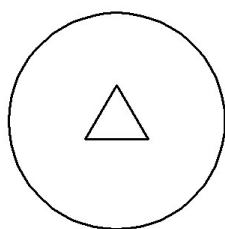


図4-6①

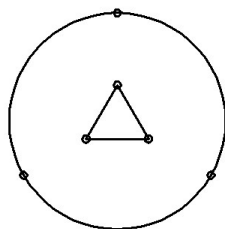


図4-6②

図表 4-6 シフォンケーキと6つの点の配置

最初に思いつくのは、図表 4-7 ①のような切り方でしょう。1本目を 120° ずつ回転させると、3本の切れ目ができます。他にないか考えると、②のような切り方もありますね。その逆向きに結べば、③のようにも切れます。同じ6つの点でも、いくつかの「つなぎ方」があるわけです。

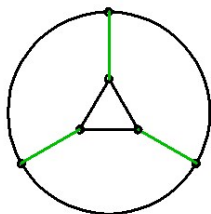


図4-7①

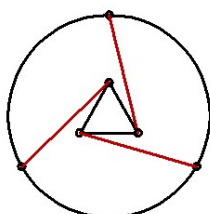


図4-7②

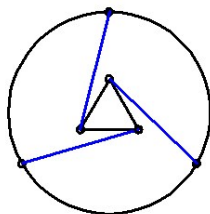


図4-7③

図表 4-7 同じ6つの点に対する3通りのつなぎ方

ここで、6つの点を e, r, r^2, f, rf, r^2f と名づけます (図表 4-8)。これらの記号は、第 1 章で正三角形の操作につけた名前を引き継いでいます。

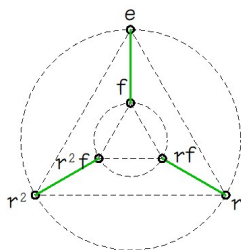


図4-8①

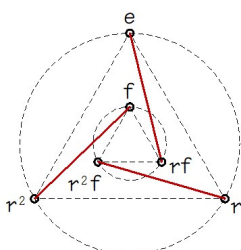


図4-8②

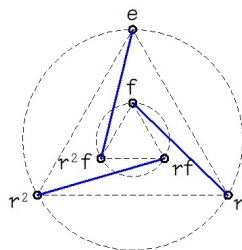


図4-8③

図表 4-8 6つの点に e, r, r^2, f, rf, r^2f を割り当てた図

図表 4-8 ①では、 e と f 、 r と rf 、 r^2 と r^2f が結ばれています。線で結ばれた2つを「同じ仲間」と考えると、 $\{e, f\}$ 、 $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ という3つのまとまりができます。

このように、どの点とどの点を「同じ」とみなすかを決めます。この関係が反射律・対称律・推移律を満たすとき、**同値関係**と呼びます。そして、その関係によってできた一つ一つのまとまりが**同値類**です。

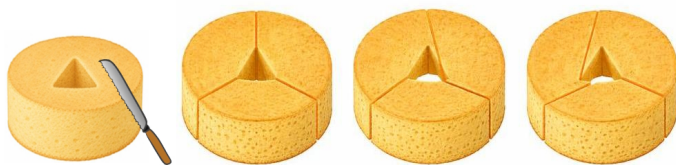
つまり、同値関係は「つなぎ方」、同値類は「そのつなぎ方でできたまとまり」と見ることができます。

②や③のように、「同じ」とみなす関係が変われば、できる同値類も変わります。

今度は、群の演算から、このようなまとまりがどのように現れるのかを考えます。そこで現れるまとまりが「剰余類」です。

第4章のまとめ

- 「等しい」と「同じ」は違う。ルールを決めると、等しくないものを「同じ」と呼べる。
- 「同じ」と呼ぶには、反射律、対称律、推移律の三つの条件を満たさなければならない。
- 三つを満たす決め方を同値関係という。
- 同値関係があると、全体が重なりなく、余りなく、組に分かれる（なぜかは、第5章で確かめる）。これを類別という。できた組の一つ一つを同値類という。
- 同じ12組でも、時刻として読むか操作として読むかで役割が違う。合成できるのは操作のほうで、群になるのも操作のほう。



図表 4-9 同値類シフォンケーキ

問題

問 4-1

「同じ誕生日である」は同値関係ですか。三つの条件で確かめてください。

問 4-2

「 a と b は、どちらも偶数か、どちらも奇数である」は同値関係ですか。同値関係なら、整数は何組に分かれますか。

問 4-3

時計を 24 時間表記にすると、整数は何組に分かれますか。

問 4-4

実数全体 (R) に、関係 $\sim$ を、「 $x \sim y \iff x^2 = y^2$ 」によって定義します。これは「 $x^2 = y^2$ であるとき、かつ、そのときに限り、 $x \sim y$ と定める。」という意味です。

1. 次の命題 ****1** が真か偽か判定してください。

① $3 \sim -3$ ② $3 \sim 2$

2. この関係が次の性質を満たすか、理由を付けて確認してください。

反射律、対称律、推移律

3. 次の①②を求めてください。 n の同値類 (n は実数) とは、「 n と関係 $\sim$ にある実数をすべて集めた集合」のことです。答えは集合 ($\{ \}$) の形で書くこと。

① 3 の同値類 ② 0 の同値類

4. 次の二つの記述の違いを説明してください。

A : $3 \sim -3$ B : 3 は、3 の同値類に属する

****1** 命題 (めいだい) とは、正しい (真) か、間違っている (偽) かが、はっきりと決まる文章や式のこと。

解答

4-1 同値関係である。

反射律：自分は自分と同じ誕生日日である。

対称律：A と B が同じ誕生日日なら、B と A も同じ誕生日日である。

推移律：A と B、B と C が同じ誕生日日なら、A と C も同じ誕生日日である。

誕生日日により、人の集まりが最大 366 組に分かれる。

4-2 同値関係である。偶数の組と奇数の組の 2 組に分かれる（差が 2 の倍数、 と言い換えれば時計と同じ形になる）。

4-3 24 組

4-4

この問題の定義 $x \sim y$ は、 x と y の絶対値が等しいということを表したものである（実数では、 $x^2 = y^2 \iff |x| = |y| \iff y = x$ または $y = -x$ ）。 x と y は単なる変数である。

1. ① $3^2 = (-3)^2 = 9$ 真。② $3^2 = 9$ 、 $2^2 = 4$ 偽。

2. 反射律：任意の実数 x について、 $x^2 = x^2$ である。したがって、 $x \sim x$ であり、反射律は成立する。

対称律： $x \sim y$ とする。定義から、 $x^2 = y^2$ 。等号の左右を入れ替えると、 $y^2 = x^2$ であるから、 $y \sim x$ 。よって、対称律は成立する。

推移律： $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とする。定義から $x^2 = y^2$ 、 $y^2 = z^2$ である。等号の推移性から、 $x^2 = y^2 = z^2$ 。よって、 $x \sim z$ であるから、推移律は成立する。

以上から、この関係は同値関係である。

3. ① $\{3, -3\}$ ② $\{0\}$

この問題では、「関係がある」とは「2 乗が同じ」という意味である。3 の

同値類を求めるときは、一方を 3 に固定し、 $x \sim 3$ を満たす x をすべて探せばよい。

- 4.A は「 3 と -3 の間に、関係 $\sim$ が成り立つ」という命題である。同値類の言葉に直せば、「 -3 は 3 の同値類に属する」と言い換えられる。B は「 3 が、 3 の同値類という集合の要素である」という命題である。同値類の定義から、これは $3 \sim 3$ が成り立つことを意味し、反射律によって保証される。二つは、述べている中身が違う。A は数と数の関係で、B は数と集合の関係、つまり所属である。A の左右はどちらも数だが、B の左は数、右は集合である。

第 5 章 剰余類

作った部分群を活用してみる

第 2 章で乗積表 (図表 2-3) を作り、第 3 章で、図表 2-3 を元に部分群を作りました。群全体の中に、それ自身がまた群になっている部分がある。それが部分群でした。 D_3 には 6 つありました。

図表 2-3 から、もっとわかることはないだろうか。本章では、部分群を使いながら、さらに図表 2-3 を掘り進めていきます。

§5.1 再びの乗積表

部分群は、 $\{e, f\}$ を使いましょう。これから何度も出てくるので、 H と名付けます。 $H = \{e, f\}$ です。 H は操作の集まりです。群になるのは操作でした (§2.4)。

では、表を見てみます。

		列 (先)					
行 (後)	○	e	r	r ²	f	rf	r ² f
	e	e	r	r ²	f	rf	r ² f
	r	r	r ²	e	rf	r ² f	f
	r ²	r ²	e	r	r ² f	f	rf
	f	f	r ² f	rf	e	r ²	r
	rf	rf	f	r ² f	r	e	r ²
	r ² f	r ² f	rf	f	r ²	r	e

図表 5-1 図表 2-3 の e の列と f の列に枠を付けたもの

$H = \{e, f\}$ の 2 列 (枠で囲んだところ) を上から見ていきます。 e の行には e と f 、 f の行には f と e があります。 $\{e, f\}$ が出てきました。 H そのものです。残りの r, r^2, rf, r^2f の行を見ると、 e も f も出てきません。

$\{e, f\}$ は、自分の行 $\{e, f\}$ の中に収まっていて、他の行にはみ出していません。 $\{e, f\}$ の列で、こういう収まり方をしているものは、他にないでしょうか。

§5.2 部分群で観察すると

		列 (先)					
行 (後)	◦	e	r	r ²	f	rf	r ² f
	e	e	r	r ²	f	rf	r ² f
	r	r	r ²	e	rf	r ² f	f
	r ²	r ²	e	r	r ² f	f	rf
	f	f	r ² f	rf	e	r ²	r
	rf	rf	f	r ² f	r	e	r ²
	r ² f	r ² f	rf	f	r ²	r	e

図表 5-2 $H = \{e, f\}$ に対応する列と、三つの組

ありました。 r の行と rf の行を見ると、どちらも $\{r, rf\}$ 。 r^2 の行と r^2f の行は $\{r^2, r^2f\}$ 。 同じです。 この 2 つのかたまりも、他の行には出てきません。

6 つの行が、 3 つのかたまりに分かれました。 $\{e, f\}$ 、 $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ 。 図表 5-2 で同じ色をしている所です。 余っている操作も重なっている操作もなく、どのかたまりも 2 個です。

これは $H = \{e, f\}$ に左から同じ操作を合成した結果になっています。

式で書くと、例えば H に r を左から合成することは、 $r \circ e = r$ 、 $r \circ f = rf$

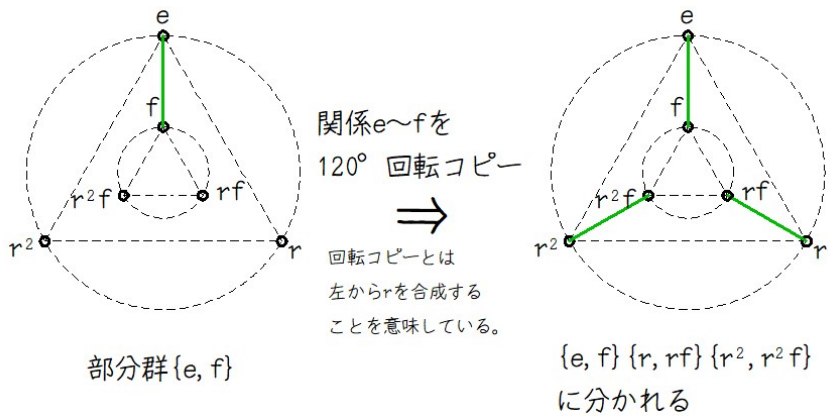
となり、 $\{r, rf\}$ ができます。

このように、 H 全体に同じ操作を左から合成すると、2 個ずつの組ができます。図表 5-2 では、その三つの組によって、 D_3 の 6 つの操作が重なりなく、余りなく分かれています。

§5.3 部分群はここにある

§5.2 では、左から同じ操作を合成すると組ができることを、表で見ました。同じことを図で見ると、別の姿になります。

図表 5-3 は、図表 1-7 の [123] のような状態表記を、三角形の頂点に振った操作名に置き換えたものです。6 つの状態と 6 つの操作は一対一対応なので (§1.4)、こういう置き換えができます。外側の 3 つが回転、内側の 3 つが鏡映で、図表 1-7 と同じく回転の順に並んでいます。

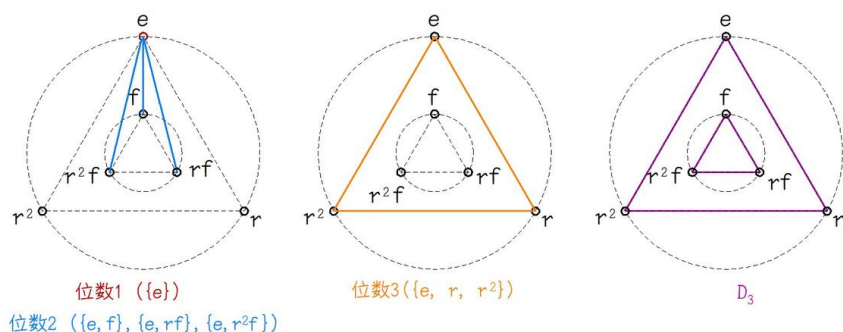


図表 5-3 6 つの状態を操作名で表した図

$H = \{e, f\}$ は、 e と f を結ぶ線分で表されます。これを 120° 回すと $\{r, rf\}$ 、

もう一度回すと $\{r^2, r^2f\}$ 。 $\{e, f\}$ に操作を加えると、6つの操作すべてが網羅されることが図から見えます。「線分を 120° 回す」は、代数では「左から r を合成する」ことです。 $\{e, f\}$ という一つの基準で、6つの操作を重なりなく余りなく3つの組に分けることができる、というわけです。

これは H に限りません。第3章で見た D_3 の部分群も、それぞれ図表5-3の中の図形として表現できます (図表5-4)。



図表5-4 D_3 の部分群を図表5-3の中の図形として表したもの

§5.4 剰余類

ここから、どれか一つの操作を指すのに g, h, k という文字を使います。 H の中のどれか一つを指すときは s 。数の話で x や y を使うのと同様です。

g を打ち消す操作は、 g^{-1} とします (§2.4 の条件 (3))。 $g^{-1} \circ g = e$ 、 $g \circ g^{-1} = e$ です。

H の各要素 s に対して、 $g \circ s$ を作り、集めたものを gH と書きます。

$H = \{e, f\}$ なら、 $gH = \{g \circ e, g \circ f\}$ です。

これを使うと、図表5-2と図表5-3で見た組は、 $rH = \{r, rf\}$ 、 $r^2H = \{r^2, r^2f\}$

と書き表せます。この gH を剰余類といいます。

6つの操作のうち、どの2つを選んでも、同じように重なりのない組み合わせができるわけではありません。例えば、 $A = \{e, r\}$ の各要素に左から r を合成すると、 $rA = \{r, r^2\}$ で、 A と rA には、どちらにも r が入ります。重なりのない組み合わせにはなりません。また、 A は $r \circ r = r^2$ が外に出てしまうので部分群ではありません (§3.3.2)。

§5.5 表を使わず剰余類を確認する

ここでは、群全体を G 、その部分群を H と書きます。

部分群を元に剰余類が作れると、

$$(G \text{ の位数}) = (H \text{ の位数}) \times (\text{剰余類の個数}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が言えそうです。さきほどの D_3 を例にとると、 $6 = 2 \times 3$ 。群の位数を、部分群の位数を使って、かけ算や割り算のように扱えそうです。ただし、これには、二つのことが前提になります。

(1) 剰余類の分かれ方

剰余類が重なりなく、余りなく分かれている。

(2) 剰余類の要素数

どの剰余類も、 H と同じ個数の要素を持つ。

(1) は、当たり前ではありません。§5.4 で、 $A = \{e, r\}$ と $rA = \{r, r^2\}$ が r だけを共有して、一部分だけ重なる例を見ました。組に分けたからといって、重ならない保証はないのです。

D_3 の場合は、表を作ることで、(1) も (2) も確認できました。しかし、表がな

い場合はどうでしょうか。

実は、表を使わずに確かめる方法があります。話は、剰余類から少し離れます。

5.5.1 関係が分かれば、組にできる

工場見学するため、6人の生徒 A, B, C, D, E, F を班に分けました。ところが、誰も名簿を持ってきていません。生徒達は、自分が誰と同じだったかは覚えていません。すると、先生は、A さんに「B さんと同じ？ C さんと同じ、...、F さんと同じ？」と聞いていきます。同じなら○、違うなら×です。この質問を、次は B さん、次は C さん...としていきます。こうして表ができました（図表 5-5）。余りも重なり也没有ありません。



	A	B	C	D	E	F	班の人数
A	○	×	×	○	×	×	2
B	×	○	×	×	○	×	2
C	×	×	○	×	×	○	2
D	○	×	×	○	×	×	2
E	×	○	×	×	○	×	2
F	×	×	○	×	×	○	2
班の人数	2	2	2	2	2	2	

図表 5-5 6 人の生徒を「同じ班か」という関係で分けた表

これと同様の質問を群に対して行います。「A さんは B さんと同じ班か」と問う代わりに「 g と h は同じ剰余類か」と問うのです（図表 5-6）。

剰余類が群 G を重なりなく、余りなく分けることを示すには、「同じ剰余類に入る」という関係を、同値関係として捉えればよさそうです（第 4 章参照）。

生徒の班分け	剰余類
Aさん、Bさん、Cさん…	e, r, r^2, f, rf, r^2f (G の要素)
1班、2班、3班	eH, rH, r^2H (剰余類)
「AさんはBさんと同じ班か」	「 g と h は同じ剰余類か」
$A \sim B$ (同じ班かの関係)	$g \sim h$ (同じ剰余類かの関係)

図表 5-6 g と h が同じ剰余類かを調べる表

そこで、§5.6 では、「 h が gH に入る」ことを、「 $g^{-1} \circ h$ が H の要素である」という式で判定できる形にします。

§5.7 では、『 $g^{-1} \circ h$ が H の要素である』という関係が同値関係の三律を満たすことを確かめます。§5.8 では、そこからできる同値類 (§5.6 で確かめるとおり、剰余類 gH そのもの) が、群 G を重なりなく、余りなく分けることを確かめます。これで §5.5(1) が示されます。

一方、§5.5(2) は、剰余類の中の操作の個数についての話です。これは「同じ組にいるかどうか」だけからはわかりません。そこで、§5.9 では別の方法で、どの剰余類も H と同じ個数の要素を持つことを確かめます。そこから、ラグランジュの定理を導きます。

§5.6 剰余類に入る条件

ここからは、 D_3 に限らない話になります。群を G 、その部分群を H と書きます (図表 5-7)。

§5.5 では、「 G の中から取ってきた 2 つの操作 g と h が、同じ剰余類にいるか」を判定できれば、剰余類の分かれ方が捉えられる、と述べました。そこで、 g を 1 つ選んで固定し、 h が gH に入るかを式で判定できる形にします。

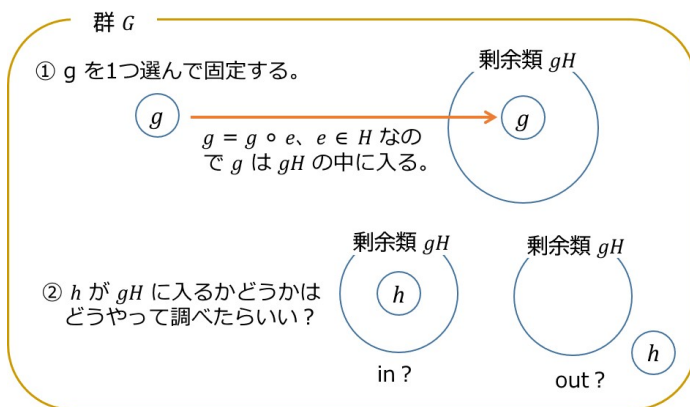
$g = g \circ e$ で、 e は H の要素なので、 g は gH の中にいます。 g 自身については

記号	指すもの	記号	指すもの
G	群全体	gH	剰余類
H	G の部分群	g^{-1}	g を打ち消す操作
g, h, h', k	G のうち、どれか一つ	$g \sim h$	$g^{-1} \circ h$ が H の要素である
s	H のうち、どれか一つ		

図表 5-7 記号のまとめ

分かったので、次に、任意の h が gH に入るかを考えます (図表 5-8)。

剰余類が全体を重なりなく分けることは、§5.7～§5.8 で確かめます。



図表 5-8 h が gH に入るか調べるには

以降、 g は剰余類 gH を作る代表元、 h は gH に入るかを判定される要素として使います。

① H の要素に、 g を合成して、剰余類 gH を作る

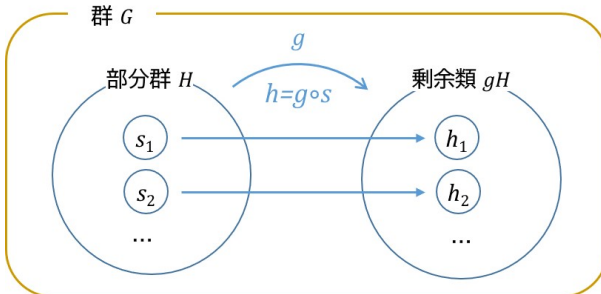
部分群 H の要素を、 $s_1, s_2, \dots$ とします。それぞれに左から同じ操作 g を合成して、 $h_1 = g \circ s_1, h_2 = g \circ s_2, \dots$ を作ります。

② $h_1, h_2, \dots$ を集めた組が gH

集めた組を、 gH と書きます (§5.4 で定義)。

③ $h_1, h_2, \dots$ は gH の中にある

作り方から、 $h_1, h_2, \dots$ は gH に入ります (図表 5-9)。



図表 5-9 部分群 H の各要素に左から g を合成し、剰余類 gH の要素を作る図

問題は、 G から任意に取った要素 h が、剰余類 gH に入るかどうかを、どう判定するかです。 gH の要素は一般には H の要素ではありません。例えば $g = r$ 、 $H = \{e, f\}$ なら、 $rH = \{r, rf\}$ で、 H とは要素がまったく違います。では、どう判定すればよいのでしょうか。それが④以降です。

④ 判定の方針

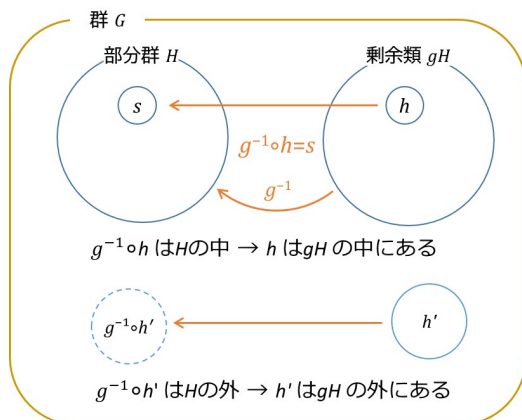
①～③で g を掛けて gH を作ったので、その逆をたどって H に戻れるかを確かめます (図表 5-10)。 h に左から g^{-1} を合成し、 $g^{-1} \circ h$ が部分群 H の要素になるかを見ます。

⑤ h が gH の中にあれば、 $g^{-1} \circ h$ は H の要素

h が gH の中にあるなら、 H のある要素 s を使って、 $h = g \circ s$ と書けます。両辺に左から g^{-1} を合成すると、 $g^{-1} \circ h = (g^{-1} \circ g) \circ s = e \circ s = s$ となります。 s はもともと H の要素なので、 $g^{-1} \circ h$ も H の要素です。

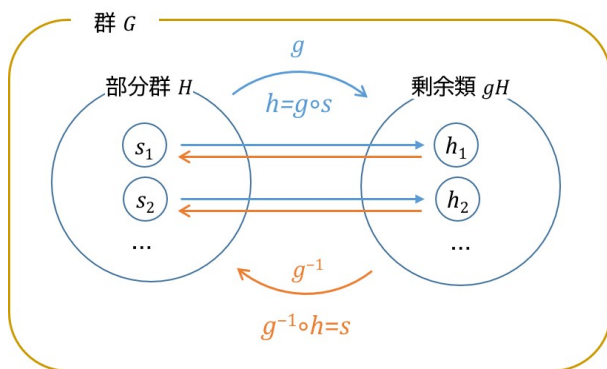
⑥ $g^{-1} \circ h$ が H の要素なら、 h は gH に入る

逆に、 $g^{-1} \circ h$ が H の要素であるとしします。その要素を s とすると、 $s = g^{-1} \circ h$



図表 5-10 剰余類 gH から部分群 H へ戻して判定する方針

です。両辺に左から g を合成すると、 $g \circ s = g \circ (g^{-1} \circ h) = (g \circ g^{-1}) \circ h = e \circ h = h$ となり、 $h = g \circ s$ と書けます。 s は H の要素なので、 h は剰余類 gH の中にあります。



図表 5-11 g と g^{-1} による二方向の対応

以上から、「 h が gH に入る」ことと、「 $g^{-1} \circ h$ が H の要素である」ことは同じ意味です。

そこで、「 $g^{-1} \circ h$ が H の要素である」という関係を、 $g \sim h$ と書くことにし

ます。

例えば、 $H = \{e, f\}$ 、 $g = r$ の場合、 $gH = rH = \{r, rf\}$ です。 $h = rf$ とすれば、 $g^{-1} \circ h = r^{-1} \circ rf = f$ で、これは H の要素です。ですから $r \sim rf$ です。

次に、この関係 $g \sim h$ が同値関係か確かめていきます。

§5.7 同値関係か確かめる

§5.6 で作ったルール「 $g^{-1} \circ h$ が H の要素である」（すなわち $g \sim h$ ）が、同値関係の三律を満たすかを確かめます。 H が部分群であること（ H 自身が群の3条件を満たすこと。§3.3）が、ここで効いてきます。

(1) 反射律

g と自分自身 g にルールを適用すると、 $g^{-1} \circ g = e$ です。 H は部分群なので、 e を持ちます (§3.3(2))。したがって、 $g^{-1} \circ g$ は H の要素です。つまり反射律は成立します。

(2) 対称律

$g \sim h$ が成り立つとします。このとき、 $g^{-1} \circ h$ は H の要素です。 $h \sim g$ が成り立つには、 $h^{-1} \circ g$ が H の要素であることが言えればよい。

H は部分群なので、その要素 $g^{-1} \circ h$ を打ち消す操作も H の要素です (§3.3(3))。打ち消す操作とは、 $(g^{-1} \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g$ 。合成した操作を打ち消すときは、逆の順序でそれぞれを打ち消します。 g^{-1} を打ち消す操作は g です (§5.4、 $g \circ g^{-1} = e$)。この $h^{-1} \circ g$ は H の要素なので、対称律は成立します。

(3) 推移律

$g \sim h$ と $h \sim k$ が成り立つとします。このとき、 $g^{-1} \circ h$ と $h^{-1} \circ k$ は、どちらも H の要素です。 H は部分群なので、この二つを合成したのも H の要素

です (§3.3(1))。これを式で書くと、

$$(g^{-1} \circ h) \circ (h^{-1} \circ k) = g^{-1} \circ (h \circ h^{-1}) \circ k = g^{-1} \circ e \circ k = g^{-1} \circ k$$

したがって、 $g^{-1} \circ k$ は H の要素です。よって $g \sim k$ が成立し、推移律は成立します。

以上、三律が成立したので、「 $g^{-1} \circ h$ が H の要素である」というルールは、同値関係です。

§5.8 同値類は全体を分ける

§5.6 で確かめたとおり、 g の同値類 (g と関係を持つ要素の集まり) は剰余類 gH そのものです。

同値関係からできる同値類が、なぜ重なりなく、余りなく分かれるのか。第4章で先送りにした理由が、これです。剰余類に限らない話なので、第4章と同じ x, y, z で書きます。

(1) 余りがない

反射律により、どの要素も自分自身と同値です。したがって、どの要素も必ず自分の同値類に入り、余りはありません。

(2) 一部分だけ重なることはない

二つの同値類に共通する要素がある場合を考えます。 x の同値類と y の同値類の両方に、 z が入っているとします。すると、 $x \sim z$ 、 $y \sim z$ です。対称律により、 $z \sim y$ なので、推移律から、 $x \sim y$ が成り立ちます。

ここで、 x の同値類に入る要素を一つ取り、 w とします。すると、 $x \sim w$ です。また、 $x \sim y$ なので、対称律から $y \sim x$ です。したがって、推移律によ

り、 $y \sim w$ となります。 w はどれを選んでもよかったので、 x の同値類に入る要素は、すべて y の同値類にも入ります。

x と y を入れ替えても同じことが言えるので、二つの同値類の中身は同じです。

したがって、同値関係からできる二つの同値類は、まったく重ならないか、同じものになるかのどちらかです。異なる同値類が一部分だけ重なることはありません。

以上から、同値関係からできる同値類は、全体を重なりなく、余りなく分けま
す。したがって、剰余類は、群 G を重なりなく、余りなく分けま
す。これで (1) が示されました。

5.8.1 部分群でない場合

§5.4 で見た $A = \{e, r\}$ を思い出してください。 $A = \{e, r\}$ と $rA = \{r, r^2\}$ は、 r だけを共有して、一部分だけ重なっていました。

A は部分群ではないので、§5.7 で使った性質が成り立ちません。対称律には、 A の要素の逆元も A の中にあることが必要です。実際、 $r \in A$ ですが、 $r^{-1} = r^2 \notin A$ です。

また、推移律には、 A の 2 つの要素を合成したものも A の中にあることが必要です。しかし、 $r \circ r = r^2$ は A の要素ではありません。

§5.9 ラグランジュの定理

§5.8 で、「剰余類は、群 G を重なりなく、余りなく分ける」ことが示されました。では、§5.5(2)「どの剰余類も、 H と同じ個数の要素を持つ」の証明に進

みます。

5.9.1 部分群と剰余類の一対一対応

H の各要素 s に、左から g を合成すると、剰余類 gH の要素 $g \circ s$ ができます。また、できた要素に左から g^{-1} を合成すれば、 $g^{-1} \circ (g \circ s) = s$ となり、元の s に戻ります。別々の s からは、別々の要素ができ、それぞれ元に戻るので、 H の要素と gH の要素は一つずつ対応します。したがって、 H と gH の要素数は同じです (図表 5-11)。

これで、どの剰余類も H と同じ個数の要素を持つことが確かめられました。
§5.5 で挙げた (2) が示せました。

5.9.2 式①の証明

§5.8 で §5.5(1) が、いま §5.9.1 で §5.5(2) が示せたので、二つを合わせると、 G の要素は、いくつかの剰余類に、重なりなく余りなく分かれます。また、どの剰余類も、 H と同じ個数の要素を持ちます。

剰余類の個数を n とすると、

$$(G \text{ の位数}) = (H \text{ の位数}) \times n$$

と言えます。これで、§5.5 の式①が証明できました。

これは、群 G の位数は、部分群 H の位数で割り切れるということです。これをラグランジュの定理といい、 n を指数といいます。

この定理から、 D_3 に位数が 4 や 5 の部分群がないことは明らかです。6 は 4 や 5 で割り切れません。

5.9.3 有限群

この定理は、群 G の要素数が有限であることを前提にしています。これまで扱ってきた D_3 は 6 個の要素でできていて、要素数が有限でした。このように、要素数が有限な群を有限群といいます。要素数が無限の群を無限群といいます。例えば、整数全体を要素とし、足し算を演算とする群がそうです。無限群では、要素の個数を数えて割り算をするというラグランジュの定理の考え方が、そのままでは使えません。

第 5 章のまとめ

- 部分群 H のすべての要素 s に、左から群 G の操作 g を合成し、でき上がる組を gH と書く。この組を剰余類という。
- ラグランジュの定理：剰余類の個数（指数）を n とすると、

$$(G \text{ の位数}) = (H \text{ の位数}) \times n$$

- 剰余類による分類は、はじめから同じ個数ずつに分けようとしたものではない。 H に群の要素を掛けて作った集合で分けた結果、同じ個数ずつになったのである。 D_3 を $H = \{e, f\}$ で分けると、各剰余類は H と同じ 2 個の要素を持ち、全部で 3 組（指数 3）になる。

問題

問 5-1

$H = \{e, rf\}$ で D_3 を分けると、どうなるでしょうか。図表 2-3 の e の列と rf の列に枠を移して読んでください。

問 5-2

「回転か、鏡映か」で D_3 の 6 つの操作を分けると、何組できるでしょうか。

問 5-3

問 5-1 の分け方で、組どうしを合成できるでしょうか。 $\{r, r^2f\}$ と $\{r^2, f\}$ から一つずつ選んで合成し、結果がどの組に入るかを、選び方を変えて比べてください。

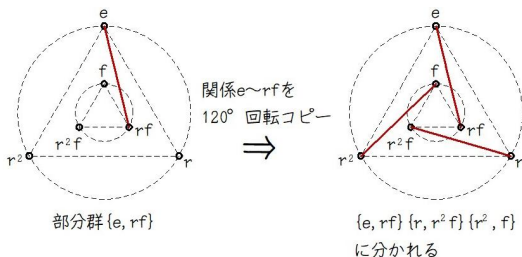
問 5-4

位数 12 の群に、位数 5 の部分群はあるでしょうか。

解答

5-1 $\{e, rf\}$ 、 $\{r, r^2f\}$ 、 $\{r^2, f\}$ の3組、2個ずつ。 $6 = 2 \times 3$ です。

e	e	r	r ²	f	rf	r ² f
e	e	r	r ²	f	rf	r ² f
r	r	r ²	e	rf	r ² f	f
r ²	r ²	e	r	r ² f	f	rf
f	f	r ² f	rf	e	r ²	r
rf	rf	f	r ² f	r	e	r ²
r ² f	r ² f	rf	f	r ²	r	e



図表 5-12

5-2 2組です。 $\{e, r, r^2\}$ と $\{f, rf, r^2f\}$ 。 $6 = 3 \times 2$ です。この2組は、図表 1-7 の外側（回転）と内側（鏡映）にあたります。分ける基準に使った $\{e, r, r^2\}$ は、第3章で見つけた位数3の部分群です。

この分け方には、組同士を合成できるという性質があります。回転に回転を合成すると回転。回転に鏡映を合成すると鏡映。鏡映に鏡映を合成すると回転。鏡映に回転を合成すると鏡映。図表 2-3 で確かめられます。組が2つあって、その2つの間にも合成があります。組そのものを、新しい群の要素と見なせそうです。ところが、位数2の部分群 ($\{e, f\}$ 、 $\{e, rf\}$ 、 $\{e, r^2f\}$) で分けると、これできません。このことを問うのが問 5-3 です。

5-3

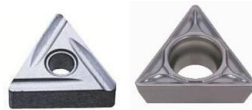
できません。 $r \circ r^2 = e$ で、これは $\{e, rf\}$ の組です。ところが $r^2f \circ r^2 = f$ で、これは $\{r^2, f\}$ の組です。同じ2組を合成したのに、どの代表を選ぶかで行き先が変わります（図表 5-13）。同じ群を、同じやり方で分けたのに、片方は合成でき、片方はできません。これは、 $\{e, r, r^2\}$ と $\{e, rf\}$ の違いです。詳しくは7章で扱います。

o	r^2	f
r	e	rf
r^2f	f	r^2

図表 5-13

5-4 ありません。5 で 12 は割り切れないからです。ラグランジュの定理より、この群が位数 5 の部分群を持たないことは、乗積表を書き出さなくても言えます。

Column



これは、旋盤のバイトの超硬チップです。このチップに入っている溝はチップブレーカーといいます。図表 5-3 や図表 5-12 を作っているとき、剰余類が三角を等分しているように見え、「何かに似てるぞ。あっ!」と思ったのが、これでした。

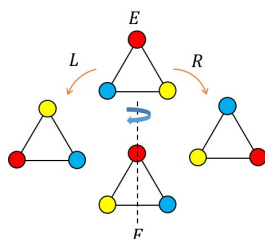
第6章 第1～5章の確認問題

問6-1を除き、本書では、あとから行う操作を左に書きます (§1.5)。 $g \circ h$ は「先に h 、次に g 」という意味です。

問6-1

正三角形のカードの3つの頂点に、図のように赤・黄・青の印が付いています。最初は、赤が上、黄が右下、青が左下にあります。次の操作を考えます。

- E：何も動かさない
- R：カードを時計回りに 120 度回転する
- L：カードを反時計回りに 120 度回転する
- F：上の頂点と対辺の中点を通る直線を軸として裏返す



図表 6-1

操作は、書かれている順番に行います。R-F とは、R を行って、F を行うという意味です。本書の合成記号では、あとから行う操作を左に書くので、R-F は $F \circ R$ と表します。

(1) R を行ったあとに F を行いました。赤・黄・青は、それぞれどの位置にあり

ますか。

- (2) 次のうち、2つの操作を行ったあと、カードが最初と同じ状態に戻るものをすべて選んでください。

ア R-R イ R-L ウ F-F エ F-R オ E-E

- (3) 最初に R を行いました。次にどの操作を行えば、最初の状態に戻りますか。
(4) R を 3 回続けて行くと、カードはどのような状態になりますか。
(5) R-F は、行う順番を入れ替えても同じ結果になりますか。

問 6-2

正六角形を動かして元の位置に重ねる操作を考えます。

- (1) 0° 回転（恒等操作）も含めると、回転は何個ありますか。
(2) 鏡映は何個ありますか。
(3) 操作は全部で何個ありますか。

問 6-3

- (1) $C_3 = \{e, r, r^2\}$ において、生成元になれる操作をすべて挙げてください。
(2) $C_4 = \{e, r, r^2, r^3\}$ において、生成元になれる操作をすべて挙げてください。

問 6-4

D_3 の群について考えます。操作を $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ とします。

- (1) H は位数 2 の部分群の 1 つとします。位数 2 の部分群とその左剰余類について、間違っているものは、次のうちどれですか。

ア. 位数 2 の部分群は $\{e, f\}$ 、 $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ の 3 つである。

イ. 剰余類 gH の g には、 $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ のどれが入ってもよい。ただ

し、同じ剰余類が重複して出てくる。

ウ．異なる左剰余類だけを取り出すなら、代表元として $\{e, r, r^2\}$ を選ぶことができる。

エ． D_3 の部分群 H について、 g と h が同じ剰余類に入るかどうかを判定する条件は、 $g^{-1} \circ h \in H$ である。

(2) 次の合成は、 D_3 の 6 つの操作のうち、どれになりますか。

- ① $f \circ r$ ② $f \circ r^2$

(3) $H = \{e, f\}$ とします。左剰余類 eH 、 rH 、 r^2H 、 fH の要素を書いてください。また、異なる左剰余類は何個ありますか。

問 6-5

写像の合成を演算とする操作の集合について、群になることを確認するための 3 条件として正しいものはどれですか。

- ア．閉じている・単位元がある・逆元がある
イ．交換則が成り立つ・単位元がある・逆元がある
ウ．閉じている・要素数が有限である・逆元がある
エ．単位元がある・交換則が成り立つ・結合則が成り立つ

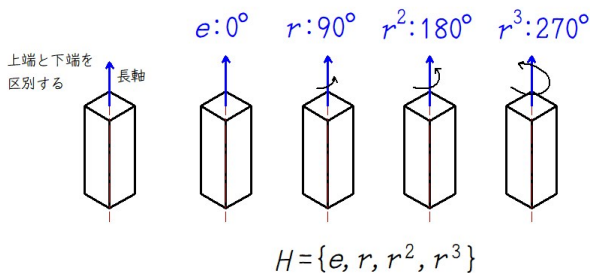
問 6-6

問 6-1 のカードの操作について考えます。次の集合のうち、合成について群になるものをすべて選んでください。また、群にならないものについては、問 6-5 の 3 条件のうち満たされないものをすべて答えてください。

- ア $\{E, R, L\}$ イ $\{E, F\}$ ウ $\{E, R, F\}$ エ $\{R, L\}$

問 6-7

図表 6-2 のような、3D-CAD で作った正方形断面の部品を考えます。

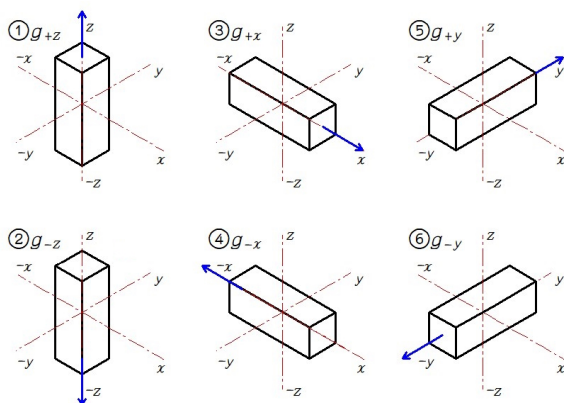


図表 6-2

- 部品には上端と下端の区別があります。
- 長軸まわりに 90° 回転しても、見た目は変わりません。
- この部品を、CAD の座標軸に沿った姿勢から、ふたたび座標軸に沿った姿勢へ移す回転の全体を G とします。
- 最初の姿勢を保ったまま、見た目を変えない回転全体を H とします。

長軸まわりの 90° 回転を r とすると、 $H = \{e, r, r^2, r^3\}$ です。ここで、 $e: 0^\circ$ 、 $r: 90^\circ$ 、 $r^2: 180^\circ$ 、 $r^3: 270^\circ$ を表します。

部品の長軸を、それぞれ $+z, -z, +x, -x, +y, -y$ の方向へ向ける操作のうち 1 つを選び、 $g_{+z}, g_{-z}, g_{+x}, g_{-x}, g_{+y}, g_{-y}$ とします。最初の姿勢はすでに $+z$ 方向を向いているので、 $g_{+z} = e$ を選びます。



図表 6-3

(1) 剰余類 $g_{+x}H$ の要素をすべて書いてください。

(2) (1) で書いた操作は、操作履歴としては異なります。それにもかかわらず、部品の最終的な見た目がすべて同じになる理由を説明してください。

(3) $g_{+z}H = H$ となることを確かめてください。また、剰余類

$$g_{-z}H, g_{+x}H, g_{-x}H, g_{+y}H, g_{-y}H$$

に入る操作では、それぞれ部品の長軸がどの方向を向きますか。

(4) $g \sim h \iff g^{-1} \circ h \in H$ を使って、次の 2 組が同じ剰余類に入るかどうかを判定してください。

$$(a) g_{+x} \text{ と } g_{+x} \circ r^2 \quad (b) g_{+x} \text{ と } g_{+z}$$

(5) 任意の操作 $g \in G$ について、回転後の部品の長軸は、必ず $+z, -z, +x, -x, +y, -y$ のどれか 1 方向を向きます。このことと、反射律 ($g \sim g$) を使って、 g が 6 個の剰余類のどれかに必ず入ることを説明してください。

(6) 2 つの剰余類 aH と bH に、共通の操作 z があるとします。つまり、 $a \sim z$, $b \sim z$ です。対称律・推移律を使って $a \sim b$ を導き、それが何を意

味するかを説明してください。

(7) $H = \{e, r, r^2, r^3\}$ と $g_{+x}H$ について、この対応を $s \mapsto g_{+x} \circ s$ の形で 4 組すべて書き、 H と $g_{+x}H$ の要素数が同じになることを確認してください。

(8) (3)～(7) より、 G は 6 個の異なる剰余類に、余りなく、重なりなく分かれます。また、各剰余類の要素数は $|H| = 4$ です。 G の操作を 1 つずつ数えずに、 $|G|$ を求めてください。

(9) 次の文の () を適切な数値で埋めてください。

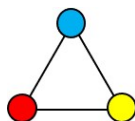
24 通りの回転操作は、見た目が同じ操作が () 通りずつ集まり、全部で () 個の剰余類に分かれる。

解答

6-1

恒等操作、逆操作、何回繰り返すと元に戻るか、順序を入れ替えると結果が変わること（非可換性）を扱っていますが、小学生でも解ける問題です。

(1) 赤：左下、黄：右下、青：上



図表 6-4

(2) イ、ウ、オ (3) L (4) 最初の状態に戻る。 (5) 同じ結果にならない。

6-2

(1) 6 (2) 6 (3) 12

この 12 個の操作全体が、正六角形の対称性を表す群 D_6 です。したがって、 D_6 の位数は 12 です。

6-3

(1) r と r^2 。 e からは e しか生成されないで、生成元にはなりません。

(2) r と r^3 。有限の巡回群では、ある元を繰り返して、初めて e に戻る回数が群の位数と等しいときに限り、その元が生成元になります。 C_4 では、 r と r^3 はどちらも 4 回で初めて e に戻ります (r^2 は 2 回、 e は 1 回です)。

6-4

(1) **ア** $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ は、単位元 e を含まないので部分群ではありません。

D_3 の位数 2 の部分群は、 $H_1 = \{e, f\}$ 、 $H_2 = \{e, rf\}$ 、 $H_3 = \{e, r^2f\}$ の 3 つです。イ、ウ、エは正しい。

(2) $f \circ r \circ f = r^{-1}$ より、 $f \circ r = r^{-1} \circ f = r^2f$ 、 $f \circ r^2 = r^{-2} \circ f = rf$ です。

したがって、① r^2f ② rf です。

(3) 各剰余類は、次のとおりです。

$$eH = \{e \circ e, e \circ f\} = \{e, f\}$$

$$rH = \{r \circ e, r \circ f\} = \{r, rf\}$$

$$r^2H = \{r^2 \circ e, r^2 \circ f\} = \{r^2, r^2f\}$$

$$fH = \{f \circ e, f \circ f\} = \{f, e\}$$

fH は eH と同じ剰余類です。判定条件で確かめると、 $e^{-1} \circ f = f \in H$ です。

したがって、異なる左剰余類は **3** 個です。 D_3 の 6 個の操作が、2 個ずつ 3 つの剰余類に分かれます ($6 = 2 \times 3$)。これは、問 6-7 で扱うラグランジュの定理の具体例です。

6-5 ア 写像の合成を演算とする場合、群になることを確認する 3 条件は、組み合わせた結果が閉じていること、何もしない操作（単位元）があること、どの操作にも打ち消す操作（逆元）があることの 3 つです。

6-6 ア と **イ**。ウは閉性と逆元、エは閉性と単位元を満たしていない。

6-7 学習のポイント

① 反射律、対称律、推移律については、§5.7 を参照。

② 「余りなく」は、反射律 ($g \sim g$) から言える (§5.8 参照)。

- ③ 「重なりなく」は、対称律・推移律から言える (§5.8 参照)。
- ④ H と各剰余類は、 g と g^{-1} による一対一対応で、同じ要素数になる (§5.9.1 参照)。
- ⑤ ②～④をまとめると、 $(Gの位数) = (Hの位数) \times n$ というラグランジュの定理の式になる (§5.9.2 参照)。

(1)剰余類を書く問題。

$H = \{e, r, r^2, r^3\}$ なので、 $g_{+x}H = \{g_{+x}, g_{+x} \circ r, g_{+x} \circ r^2, g_{+x} \circ r^3\}$ です。

(2)CAD 上の意味を考える問題。

操作 e, r, r^2, r^3 の結果は、見た目には区別がつきません。そのあと、すべてに同じ操作 g_{+x} を行っても、最終的にはすべて長軸が $+x$ を向いた同じ見た目になります。

(3)剰余類と長軸の向きを対応させる問題。

$g_{+z} = e$ なので、

$$g_{+z}H = \{e \circ e, e \circ r, e \circ r^2, e \circ r^3\} = \{e, r, r^2, r^3\} = H$$

です。

次に、 H の要素 s は長軸を $+z$ のまま保ちます。したがって、 $g \circ s$ (先に s 、次に g) で長軸がどちらを向くかは、 g だけで決まります。よって、 $g_{-z}H, g_{+x}H, g_{-x}H, g_{+y}H, g_{-y}H$ に入る操作では、長軸はそれぞれ $-z, +x, -x, +y, -y$ を向きます。

したがって、 $g_{+z}H, g_{-z}H, g_{+x}H, g_{-x}H, g_{+y}H, g_{-y}H$ では、長軸の向きがそれぞれ異なります。このため、この 6 個の剰余類は互いに異なります。

(4) 同じ剰余類に入るかを判定する問題。

1 項目を g 、2 項目を h とすると、(a) は $g = g_{+x}$ 、 $h = g_{+x} \circ r^2$ 、(b) は $g = g_{+x}$ 、 $h = g_{+z}$ です。

(a) 判定条件の左辺は

$$g_{+x}^{-1} \circ (g_{+x} \circ r^2) = (g_{+x}^{-1} \circ g_{+x}) \circ r^2 = e \circ r^2 = r^2 \in H$$

です。したがって、同じ剰余類に入ります。

(b) $g_{+z} = e$ なので、判定条件の左辺は

$$g_{+x}^{-1} \circ g_{+z} = g_{+x}^{-1} \circ e = g_{+x}^{-1}$$

です。仮に $g_{+x}^{-1} \in H$ なら、 H は部分群なので逆元 g_{+x} も H に入ります。しかし、 H の操作は長軸を $+z$ に保つのに対し、 g_{+x} は長軸を $+x$ へ動かします。これは矛盾します。したがって、 $g_{+x}^{-1} \circ g_{+z} \notin H$ であり、同じ剰余類には入りません。

(5) 「余りなく」を確認する問題。

H は部分群なので $e \in H$ です。よって $g^{-1} \circ g = e \in H$ 、すなわち $g \sim g$ (反射律) が成り立ちます。したがって、 g は自分自身の剰余類 gH に入ります。

次に、 g で回した後の長軸の向きを見ます。例えば $+x$ を向くなら、 $g_{+x}^{-1} \circ g$ は、先に g で長軸を $+z$ から $+x$ へ向け、次に g_{+x}^{-1} で $+x$ から $+z$ へ戻す操作です。したがって $g_{+x}^{-1} \circ g \in H$ であり、 $g_{+x} \sim g$ です。同値な要素が定める剰余類は同じなので (§5.8)、 $gH = g_{+x}H$ となります。反射律から $g \in gH$ だったので、 $g \in g_{+x}H$ です。

長軸が $-z, -x, +y, -y, +z$ を向く場合も同様です。したがって、どの操作 g も 6 個の剰余類のいずれかに必ず入ります。これが「余りなく」です。

(6)「重なりなく」を確認する問題。

$a \sim z$ 、 $b \sim z$ とします。対称律により $z \sim b$ です。 $a \sim z$ と $z \sim b$ から、推移律により $a \sim b$ です。したがって §5.8 より $aH = bH$ です。つまり、2つの剰余類が1つでも要素を共有すれば完全に同じ剰余類になります。よって、異なる剰余類どうしは重なりません。

(7) H との対応を確認する問題。

$$e \mapsto g_{+x} \circ e = g_{+x}, \quad r \mapsto g_{+x} \circ r, \quad r^2 \mapsto g_{+x} \circ r^2, \quad r^3 \mapsto g_{+x} \circ r^3$$

逆に、 $g_{+x}H$ の各要素に左から g_{+x}^{-1} を合成すると、 $g_{+x}^{-1} \circ (g_{+x} \circ s) = s$ となり、元の s に戻ります。別々の s からは別々の要素ができ、それぞれ元に戻せるので、 H の4つの要素と $g_{+x}H$ の4つの要素は一対一に対応します。したがって、要素数は同じ4個です。

(8)ラグランジュの定理です。

$$|G| = |H| \times n = 4 \times 6 = 24。$$

(9)24通りの回転操作は、見た目が同じ操作が4通りずつ集まり、全部で6個の剰余類に分かれます。

剰余類戦隊 D_3

剰余類は、定義や計算は追えても、「何をしているのか」という実感がつかみにくいところがあります。ここでは、 D_3 の剰余類を「6 人の戦隊ヒーロー」にたとえて考えます。

6 人を、同じルールのもとで、重なりなく、余りなくチーム分けしていく。そんな物語として考えると、部分群と剰余類の関係が少し見えやすくなります。





剰余類戦隊 D_3 は、緊急時だけ全員同時に変身し、一体となって悪と闘う6人のヒーロー達である。コードネーム e, r, r^2, f, rf, r^2f の6人は、急遽、ここ秘密基地 D_3 に集められていた。











剰余類とは、基準となる部分群を決め、その基準に同じルールを適用することで、群全体を重なりなく、余りなく分けたものです。

司令官（コンピュータ）は、6人を剰余類のように、余りなく、重なりなく、均等に分けました。しかし、ヒーローたちはその組み合わせが気に入らなかったようです。

とはいえ、「2人ずつなら、好きな者同士で自由に組ませてほしい」という要求は認められません。

なぜなら、彼らは剰余類戦隊。ただ同じ人数に分かれればいいヒーローではないのです。

第7章 正規部分群と商群

群論という抽象数学への道を登り始めて、剰余類まで来ました。この章では、剰余類の「向き」に注目して正規部分群を導入し、剰余類そのものを要素とする新しい群である商群を作ります。これは第8章の準同型へとつながります。

§7.1 右剰余類の定義

これまでの剰余類 gH は、 H の中の操作 s を先に行い、そこに g を後から続けて行った結果を全部集めた集合でした。

$$gH = \{g \circ s \mid s \in H\}$$

ここで順番を入れ替え、 g を先に行い、 H の中の操作を後から続けて行った結果を集めます。

第5章（図表5-1）では、 H の要素を列（先）にとり、各行を横に読んで gH を作りました。逆に、 H の要素を行（後）にとり、列 g を縦に読むと、 g を先に行い、 H の操作を後から行った結果が並びます。これが、右から合成した剰余類です。

G の部分群 H と、 G の要素 g に対して、

$$Hg = \{s \circ g \mid s \in H\}$$

を、 H による g の**右剰余類**と呼びます。これと区別するため、これまでの剰余類 gH を**左剰余類**と呼びます。

「左」「右」は、式の中で g を H の左に書くか右に書くかを表しており、操作の順番を表すものではありません。 $\circ$ は右側の操作を先に行うので、左剰余類 gH では g が後、右剰余類 Hg では g が先になります。

例として、 D_3 の位数 2 の部分群 $H = \{e, f\}$ の右剰余類を求めます。
 $f \circ r = r^2 f$ 、 $f \circ r^2 = r f$ を使うと、

$$He = \{e, f\}, \quad Hr = \{r, r^2 f\}, \quad Hr^2 = \{r^2, r f\}$$

の 3 つです。左剰余類と同じく、右剰余類も D_3 を重なりなく 3 つに分けています。

§7.2 左剰余類と右剰余類の比較

同じ $H = \{e, f\}$ による左剰余類は、

$$H = \{e, f\}, \quad rH = \{r, r f\}, \quad r^2 H = \{r^2, r^2 f\}$$

でした。右剰余類と並べると、 H 自身は一致しますが、 $Hr = \{r, r^2 f\}$ と $Hr^2 = \{r^2, r f\}$ は、左剰余類のどれとも一致しません。

このずれを乗積表で確かめます (図表 7-1)。

左剰余類 gH 部分群 H (先)				右剰余類 Hg 部分群 H (後)			
操作 g (後)	左	e	f	操作 g (先)	右	e	f
	e	e	f		e	e	f
	r	r	$r f$		r	r	$r^2 f$
	r^2	r^2	$r^2 f$		r^2	r^2	$r f$

左剰余類 gH 部分群 H (先)				右剰余類 Hg 部分群 H (後)			
操作 g (後)	左	e	f	操作 g (先)	右	e	f
	e	H	H		e	H	H
	r	rH	rH		r	rH	$r^2 H$
	r^2	$r^2 H$	$r^2 H$		r^2	$r^2 H$	rH

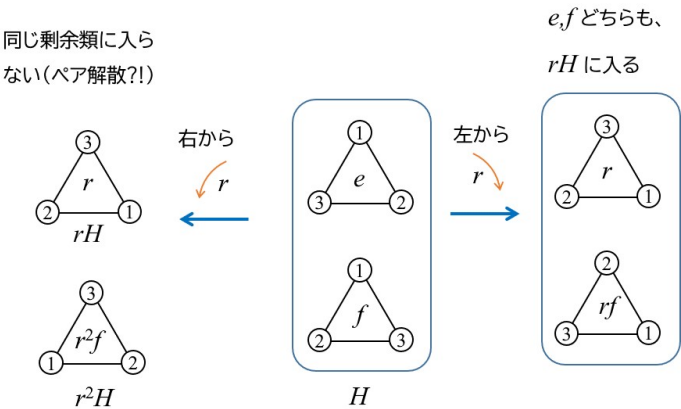
図表 7-1 左剰余類と右剰余類の乗積表

左表は、行が代表元 g 、列が H の要素 h で、上段が $g \circ h$ 、下段がそのセルの属する左剰余類です。どの行も 1 つの左剰余類で揃っています。これは左剰余類の定義から当然です。

右表は、行と列は左表と同じで、セルを $h \circ g$ にしたもの、つまり g をまず行い、そこに H 中の操作を後から続けて行った結果です。下段は左表と同じく、セルが属する左剰余類です。 r の行を見ると、 e 列は rH 、 f 列は r^2H と、1 つの行に 2 つの左剰余類が混ざっています。 r^2 の行も同様です。

つまり、右剰余類 $Hr = \{r, r^2f\}$ のうち、 r は左剰余類 rH に、 r^2f は r^2H に属し、 Hr は 2 つの左剰余類にまたがっています (図表 7-2)。

r を左から合成するか、右から合成するか



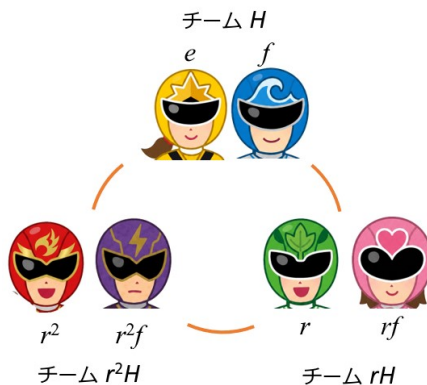
Hr の 2 要素は、別々の左剰余類 rH, r^2H にまたがる

図表 7-2 右剰余類と左剰余類の対応

このことを、剰余類戦隊 D_3 で説明してみます。

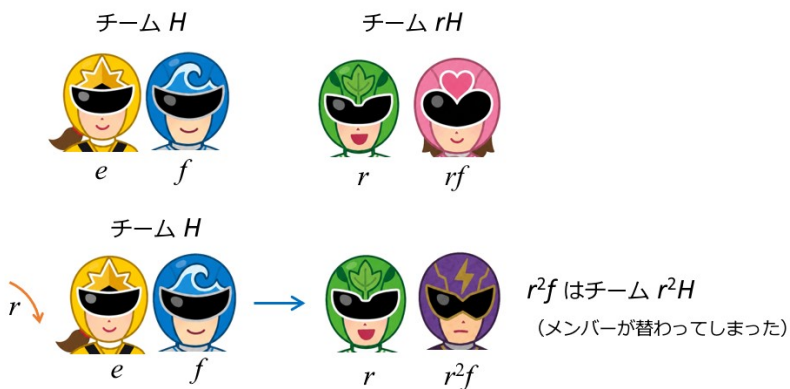
剰余類戦隊の任務は、遊園地のヒーローショーの出演です。二人一組で順番に

出演します。基準ペアはチーム $H = \{e, f\}$ で、ほかはチーム $rH = \{r, rf\}$ 、
 チーム $r^2H = \{r^2, r^2f\}$ です（図表 7-3）。



図表 7-3 剰余類ごとのチーム分け

コンピュータは、チームに左から操作 r を行って、次に出演する組をスクリーンに表示します。ところが、「いつも左からではなく、右からも操作して、同じ r なのだから問題ないはず」とすると、図表 7-4 のようになります。



図表 7-4 右から操作したときのチーム

チーム H に右から r を作用させると、 $rH = \{r, rf\}$ ではなく、 $Hr = \{r, r^2f\}$ が表示されました。このペアは、元のチームのどれでもありません。同じ操作 r でも、左から行くか右から行くかで結果が変わるのです。

§7.3 正規部分群

では、 H を位数 3 の部分群 $H = \{e, r, r^2\}$ にすると、どうなるでしょう。 H による左剰余類は H と fH の 2 つなので、代表元は e と f で足りません (図表 7-5)。

		左剰余類 部分群 H (先)						右剰余類 部分群 H (後)			
操作 g (後)	左	e	r	r^2		操作 g (先)	右	e	r	r^2	
	e	e	r	r^2			e	e	r	r^2	
	f	f	r^2f	rf			f	f	rf	r^2f	

		左剰余類 部分群 H (先)						右剰余類 部分群 H (後)			
操作 g (後)	左	e	r	r^2		操作 g (先)	右	e	r	r^2	
	e	H	H	H			e	H	H	H	
	f	fH	fH	fH			f	fH	fH	fH	

図表 7-5 位数 3 の部分群による左剰余類と右剰余類

図表 7-5 の赤で囲んだ部分は、セルの値は左右で違いますが、下段の属する剰余類で見ると左右で一致します。実際、

$$fH = \{f, f \circ r, f \circ r^2\} = \{f, r^2f, rf\}, Hf = \{f, r \circ f, r^2 \circ f\} = \{f, rf, r^2f\}$$

で、 $fH = Hf$ です。このように、 H の選び方によっては左剰余類と右剰余

類が一致します。

G の部分群 H が、すべての $g \in G$ について、

$$gH = Hg$$

を満たすとき、 H を G の正規部分群**1 と呼びます。

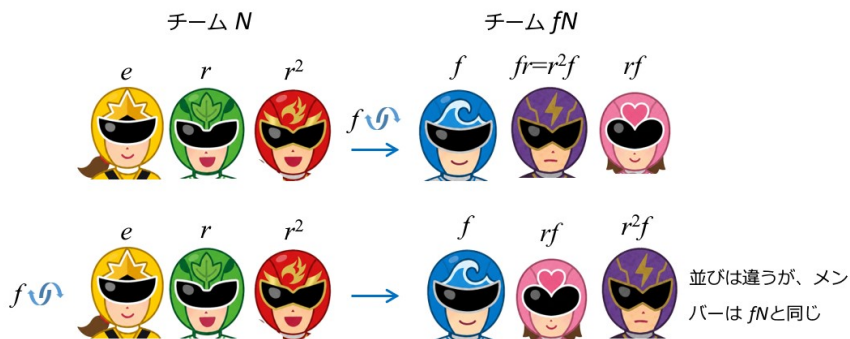
これに対して $H = \{e, f\}$ は、 $rH \neq Hr$ なので正規部分群ではありません。

ここでは、区別のために「非正規部分群」と呼びます。

なぜこの性質に特別な名前を付けるかというと、正規部分群があると、剰余類そのものを新しい群の要素として扱えるようになるからです。逆に、正規でない部分群では、代表元どうしの演算を使って剰余類どうしの演算を定めることができません。この違いを、§7.4～§7.6 で追いかけていきます。

これから、 D_3 の正規部分群 $\{e, r, r^2\}$ を N と書きます。 N は正規を意味する normal の頭文字です。

D_3 は、 $N = \{e, r, r^2\}$ と $fN = \{f, rf, r^2f\}$ の2つに分かれます。 N は回転だけ、 fN は鏡映だけの剰余類です。剰余類戦隊 D_3 で表すと、図表 7-6 のようになります。



図表 7-6 正規部分群による D_3 の分解

**1 定義は、すべての $g \in G$ についての条件です。図表 7-5 で確かめたのは代表元 e, f だけ

なので、残りの要素についても確かめます。 $g = r, r^2$ は H の要素なので、 $gH = H = Hg$ です。 $g = rf$ では、

$$rfH = \{rf, f, r^2f\}, \quad Hrf = \{rf, r^2f, f\}$$

で一致します。 $g = r^2f$ も同様に確かめられます。したがって、 $\{e, r, r^2\}$ は D_3 の正規部分群です。

§7.4 剰余類を1つの要素として見る

§7.3 で、 D_3 は正規部分群 $N = \{e, r, r^2\}$ を基準にすると、 $N = \{e, r, r^2\}$ と $fN = \{f, rf, r^2f\}$ の2つの剰余類に分かれることが分かりました。

この N と fN に注目して、 D_3 を観察してみましょう（図表 7-7）。

D_3 の乗積表

$\circ$	e	r	r^2	f	rf	r^2f
e	e	r	r^2	f	rf	r^2f
r	r	r^2	e	rf	r^2f	f
r^2	r^2	e	r	r^2f	f	rf
f	f	r^2f	rf	e	r^2	r
rf	rf	f	r^2f	r	e	r^2
r^2f	r^2f	rf	f	r^2	r	e

各セルを、 N か fN かで塗り分けたもの

$\circ$	e	r	r^2	f	rf	r^2f
e	N	N	N	fN	fN	fN
r	N	N	N	fN	fN	fN
r^2	N	N	N	fN	fN	fN
f	fN	fN	fN	N	N	N
rf	fN	fN	fN	N	N	N
r^2f	fN	fN	fN	N	N	N

$\circ$	N	fN
N	N	fN
fN	fN	N

図表 7-7 剰余類でまとめた D_3 の乗積表

図表 7-7 の中央は、各セルがチーム N かチーム fN かで塗り分けたものです。チームが 3×3 のブロックに固まっています。そこでさらに、「セルの値が何か」ではなく、「値がどちらの剰余類に入るか」だけで表を見ると、右のように表を小さくできます。

次に、 $H = \{e, f\}$ を基準として、チーム H 、 rH 、 r^2H で置き換えてみましょう（図表 7-8）。

各セルを、 H か rH か r^2H かで塗り分けたもの

$\circ$	e	f	r	rf	r^2	r^2f
e	H	H	rH	rH	r^2H	r^2H
f	H	H	r^2H	r^2H	rH	rH
r	rH	rH	r^2H	r^2H	H	H
rf	rH	rH	H	H	r^2H	r^2H
r^2	r^2H	r^2H	H	H	rH	rH
r^2f	r^2H	r^2H	rH	rH	H	H

$\circ$	H	rH	r^2H
H	H	?	?
rH	rH	?	?
r^2H	r^2H	?	?

図表 7-8 非正規部分群を基準にした乗積表

正規部分群を基準とすると、剰余類で乗積表を小さくすることができましたが、位数 2 の部分群 H を基準にしても、乗積表を小さくすることはできません。剰余類どうしの演算が代表元によって変わってしまい、もとの群の演算を使って、剰余類どうしの演算を定めることができないことが確認できました。

剰余類どうしの演算が代表元によらず決まることは、正規部分群なら一般に成り立ちます。その証明は問 7-5 で確認します。ここでは、乗積表から観察した結果を基に、新しい群を考えます。

§7.5 商群

正規部分群 N を使うと、剰余類 N 、 fN を 1 つの要素と見た乗積表が作れました (図表 7-7 右)。剰余類どうしの合成を $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ と定めま
す。この演算がきちんと定まるためには、代表元の選び方によらず結果が同じ剰余類に入ることが必要です。 N が正規部分群のとき、これが成り立ちます (問 7-5)。積 $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ は再び剰余類なので、閉じています。残る結

合則・単位元・逆元を確かめます。

- 結合則：もとの群 G の結合則から自動的に成り立ちます。
- 単位元： $N = eN$ が単位元です。 $(aN) \circ (eN) = (a \circ e)N = aN$ 、 $(eN) \circ (aN) = aN$ となります。
- 逆元： aN の逆元は $a^{-1}N$ です。 $(aN) \circ (a^{-1}N) = (a \circ a^{-1})N = eN = N$ 、 $(a^{-1}N) \circ (aN) = N$ となります。

このようにして作った新しい群を、 G の N による商群（剰余群ともいいます）と呼び、 G/N と書きます。

今回の例では、 $D_3/N = \{N, fN\}$ です。この乗積表（図表 7-7 右）を抜き出すと、図表 7-9 のようになります。

$\circ$	N	fN
N	N	fN
fN	fN	N

図表 7-9 商群の乗積表

§7.6 商群の意味

もとの D_3 には、 $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ の 6 個の要素がありました。商群 D_3/N では、 $\{N, fN\}$ と 2 個になります。何が起こったのかというと、要素を「回転側か、鏡映側か」という違いで粗く分けたということです。こうすることで、大きく複雑な群を、より小さな群にまとめて扱うことができるようになるのが商群です。

戦隊ヒーローで例えるなら、ギジュっちゅ遊園地のヒーローショーの出演は、

チーム N かチーム fN です。隊員 e, r, r^2, f, rf, r^2f は出演しますが、ヒーローたちはチームとしてひとくくりで扱われます。そのため、チーム N が出演する日にヒーロー r のファンが遊園地に行っても、出演者名には「チーム N 」とあるだけ、というイメージです。

第7章のまとめ

- 部分群 H に対して、左剰余類 gH と右剰余類 Hg がある。
- すべての $g \in G$ について $gH = Hg$ が成り立つ部分群を、正規部分群と呼ぶ。
- 正規部分群 N を使って乗積表の行と列を剰余類ごとにまとめると、各ブロックの答えは同じ剰余類にそろふ。そこで、各ブロックを1マスに縮めると、剰余類を要素とする新しい乗積表ができる。この新しい群を商群と呼び、 G/N と書く。
- 正規部分群でない場合は、異なる剰余類が混ざるブロックが生じる。そのため、もとの群の演算を使って、剰余類どうしの演算をこの方法で定めることはできない。

問題

$D_3 = \{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ 、 $N = \{e, r, r^2\}$ とします。

問 7-1

D_3 の位数 2 の部分群には $\{e, f\}$ 、 $\{e, rf\}$ 、 $\{e, r^2f\}$ の 3 つがあります。ここでは $H = \{e, rf\}$ とします。

- (1) 左剰余類 rH を求めてください。
- (2) 右剰余類 Hr を求めてください。
- (3) rH と Hr を比較し、 H が D_3 の正規部分群であるかどうかを説明してください。

問 7-2

$N = \{e, r, r^2\}$ 、 $fN = \{f, rf, r^2f\}$ とします。次の計算を通して、剰余類どうしの演算 $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ について、代表元を変えても積が属する剰余類が変わらないことを具体例で確かめてください。

- (1) $N \circ fN$ について、 N の代表元として r 、 fN の代表元として rf を選び、 $r \circ (rf)$ を計算してください。また、その結果が属する剰余類を答えてください。
- (2) $fN \circ fN$ について、左の fN の代表元として rf 、右の fN の代表元として r^2f を選び、 $(rf) \circ (r^2f)$ を計算してください。また、その結果が属する剰余類を答えてください。
- (3) 今度は、 $N \circ fN$ では代表元として e, f を、 $fN \circ fN$ では代表元として f, f を選んで計算してください。(1)、(2) と結果が属する剰余類を比較し、 $N \circ fN$ と $fN \circ fN$ の値を求めてください。

問 7-3

$H = \{e, f\}$ とします。 H と rH の合成を、代表元を変えて調べます。

- (1) H の代表元として e 、 rH の代表元として r を選び、 $e \circ r$ を求めてください。また、結果が属する左剰余類を答えてください。
- (2) H の代表元として f 、 rH の代表元として rf を選び、 $f \circ (rf)$ を求めてください。また、結果が属する左剰余類を答えてください。

- (3)(1)、(2)の結果から、 $H \circ rH$ を1つの剰余類として定められない理由を説明してください。

問 7-4

D_3 の正規部分群には、 $\{e\}$ 、 $N = \{e, r, r^2\}$ 、 D_3 自身の3つがあります。 $\{e\}$ と D_3 で割った商群について考えます。

- (1) $D_3/\{e\}$ の要素をすべて求めてください。また、要素数と、どの群と同じ構造かを答えてください。
- (2) D_3/D_3 の要素をすべて求め、要素数を答えてください。
- (3) D_3/N の要素数は2、 $D_3/\{e\}$ の要素数は6、 D_3/D_3 の要素数は1です。この3つを比較し、「 N で割ること」が D_3 をどのくらいの粗さで見ることに対応するか説明してください。

問 7-5

一般の群 G と正規部分群 N を考えます。2つの剰余類 aN, bN から代表元 a, b を選び、同じ剰余類から別の代表元 a', b' を選ぶと、 $a' = a \circ n_1$ 、 $b' = b \circ n_2$ と書けます。ただし、 $n_1, n_2 \in N$ です。以下で $(a' \circ b')N = (a \circ b)N$ を確かめ、剰余類どうしの演算が代表元によらないことを示します。

- (1) N は正規部分群なので $Nb = bN$ です。 $n_1 \in N$ であることから、ある $n_3 \in N$ を使って $n_1 \circ b = b \circ n_3$ と書けることを確かめてください。
- (2) (1) を使って、 $a' \circ b' = a \circ b \circ (n_3 \circ n_2)$ となることを確かめてください。
- (3) N が部分群であることから $n_3 \circ n_2 \in N$ です。これを使って $a' \circ b' \in (a \circ b)N$ を示し、さらに $(a' \circ b')N = (a \circ b)N$ となることを確かめてください。

解答

7-1

(1) $rH = \{r \circ e, r \circ rf\} = \{r, r^2f\}$ です。ここで、 $r \circ rf = r \circ r \circ f = r^2f$ です。

(2) $Hr = \{e \circ r, rf \circ r\} = \{r, f\}$ です。ここで、 $rf \circ r = r \circ (f \circ r) = r \circ r^2f = r^3f = f$ です。

(3) $rH = \{r, r^2f\} \neq \{r, f\} = Hr$ なので、 H は正規部分群ではありません。

7-2

(1) $r \circ (rf) = r \circ (r \circ f) = (r \circ r) \circ f = r^2f$ です。 $r^2f \in fN$ なので、結果は fN に属します。

(2) まず、 $f \circ r^2 = (f \circ r) \circ r = r^2f \circ r = r^2 \circ (f \circ r) = r^2 \circ r^2f = r^4f = rf$ です。したがって、 $(rf) \circ (r^2f) = r \circ (f \circ r^2) \circ f = r \circ (rf) \circ f = r^2$ となります。 $r^2 \in N$ なので、結果は N に属します。

(3) $N \circ fN$ について代表元 e, f を選ぶと、 $e \circ f = f \in fN$ です。(1) でも $r \circ (rf) = r^2f \in fN$ なので、代表元を変えても積が属する剰余類は fN です。したがって、 $N \circ fN = fN$ です。 $fN \circ fN$ について代表元 f, f を選ぶと、 $f \circ f = e \in N$ です。(2) でも $(rf) \circ (r^2f) = r^2 \in N$ なので、代表元を変えても積が属する剰余類は N です。したがって、 $fN \circ fN = N$ です。

7-3

(1) $e \circ r = r$ です。 $r \in rH = \{r, rf\}$ なので、結果は rH に属します。

(2) $f \circ (rf) = f \circ r \circ f = (f \circ r) \circ f = r^2f \circ f = r^2$ です。 $r^2 \in r^2H = \{r^2, r^2f\}$

なので、結果は r^2H に属します。

(3) 同じ $H \circ rH$ の計算でも、代表元によって結果が rH または r^2H になり

ます。そのため、 $H \circ rH$ を 1 つの剰余類として定めることはできません。

$H = \{e, f\}$ が正規部分群ではないためです。

7-4

(1) $\{e\}$ による剰余類は、 D_3 の各要素を 1 つずつ含む集合です。したがって、

$$D_3/\{e\} = \{\{e\}, \{r\}, \{r^2\}, \{f\}, \{rf\}, \{r^2f\}\}$$

です。要素数は 6 です。 g と $\{g\}$ を対応させると、 $\{g\} \circ \{h\} = \{g \circ h\}$ となるので、 $D_3/\{e\}$ は D_3 と同じ構造です。

(2) D_3 による剰余類は D_3 自身だけです。したがって、 $D_3/D_3 = \{D_3\}$ で、要素数は 1 です。

(3) $D_3/\{e\}$ は、各要素を区別したままの最も細かい見方です。 D_3/D_3 は、すべての要素を 1 つにまとめた最も粗い見方です。 D_3/N はその中間で、「回転か鏡映か」という区別だけを残す見方です。

7-5

(1) $n_1 \in N$ なので、 $n_1 \circ b \in Nb$ です。 N は正規部分群なので $Nb = bN$ です。

したがって、 $n_1 \circ b \in bN$ となり、ある $n_3 \in N$ を使って $n_1 \circ b = b \circ n_3$ と書けます。

(2) $a' = a \circ n_1$ 、 $b' = b \circ n_2$ と (1) を使うと、

$$a' \circ b' = (a \circ n_1) \circ (b \circ n_2) = a \circ (n_1 \circ b) \circ n_2 = a \circ b \circ (n_3 \circ n_2)$$

となります。

(3) $n_3, n_2 \in N$ で、 N は部分群なので $n_3 \circ n_2 \in N$ です。したがって、

$a' \circ b' \in (a \circ b)N$ です。剰余類の性質として、 $x \in yN$ ならば $xN = yN$ が成り立ちます。よって、

$$(a' \circ b')N = (a \circ b)N$$

となります。つまり、 aN 、 bN からどの代表元を選んでも、合成結果が属する剰余類は変わりません。そのため、 $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ を剰余類どうしの演算として定めることができます。

商群 G/N は、 G の要素を剰余類ごとにまとめて作った新しい群です。もとの群 G と、新しく作った商群 G/N の関係を目に見える形にするには、 G の各要素を、それが属する剰余類へ対応させればよさそうです。この「対応」は次章で考えます。

第8章 準同型

本章から基本的に、群の元の合成は rf のように $\circ$ を省略し、並べて書きます。必要に応じて $\circ$ は用います。「あとから行う操作を左に書く」ことに変更はありません。

§8.1 6つが2つになる

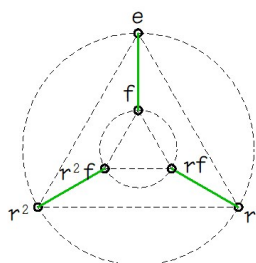


図4-8①

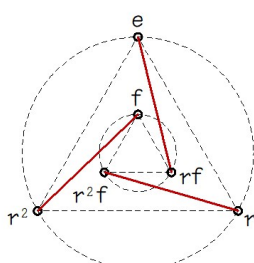


図4-8②

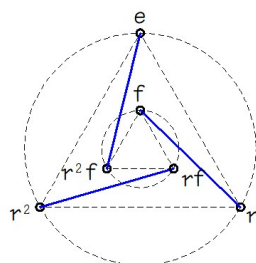


図4-8③

図表 4-8 (再掲) 6つの点に e, r, r^2, f, rf, r^2f を割り当てた図

この図①では、6つの元 e, r, r^2, f, rf, r^2f があり、 e と f 、 r と rf 、 r^2 と r^2f が線で結ばれています。以前は、「線で結ばれた2つを同じ仲間と考える」として、 $\{e, f\}$ 、 $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ という3つの同値類を作りました。この段階では、まだ線を人間が引き、「この二つを同じとみなそう」と先に決めています。

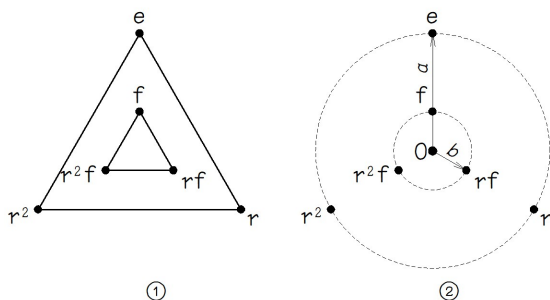
ところが、第5章で見たように、この図に群の演算を使うと、その線を計算によって引けるようになります。 $H = \{e, f\}$ を選び、二つの元 g, h について、

$g^{-1}h \in H$ なら線で結ぶと決めます。すると、まず $e^{-1}f = f \in H$ なので、 e と f を結びます。次に $r^{-1}(rf) = f \in H$ なので、 r と rf を結びます。同じように、 $(r^2)^{-1}(r^2f) = f \in H$ なので、 r^2 と r^2f も結ばれます。一方、たとえば e と r なら、 $e^{-1}r = r \notin H$ なので、この二つは結びません。結果として、 $\{e, f\}$ 、 $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ という同じつながり方が現れます。

これが「群には、この線を自分で引く仕組みがある」という意味です。その「線を引く仕組み」が $g^{-1}h \in H$ で、 $H = \{e, f\}$ は、「どの違いまでなら無視して同じとみなすか」という基準です。また、 e は「違いなし」、 f は「 f だけ違う」と考えると、 f だけ違う二つの元は同じ仲間にするという見方になります。

すると、 $e \leftrightarrow f$ 、 $r \leftrightarrow rf$ 、 $r^2 \leftrightarrow r^2f$ と、自動的に線が引かれます。

同じ仲間という関係を、群の演算そのものから作れるのです。こうしてできた「同じ仲間」が剰余類でした。さらに前章では、正規部分群によってできた剰余類をそれぞれ一つの要素として扱い、商群を作りました。本章では、細かな違いをまとめても群の計算が残るという現象を、別の方向から見ていきます。



図表 8-1 「6つの要素を2つの仲間として見る」図

図①は、三角形の対称操作からできる群 D_3 の6つの要素 $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ を6個の点として並べたものです。外側の正三角形の頂点には e, r, r^2 がありま

す。内側の正三角形の頂点には f, rf, r^2f があります。外側と内側の正三角形は同じ中心をもっています。この共通の中心を O^{**1} とします。

****1** 厳密には、正三角形の外心。

図②では、中心 O から各点までの距離に注目します。 e, r, r^2 の3点は、 O から同じ距離 a の位置にあります。 f, rf, r^2f の3点は、 O から同じ距離 b の位置にあります。ここで、 $a \neq b$ です。したがって、6個の点は、中心 O からの距離だけに注目すると、 $\{e, r, r^2\}$ と $\{f, rf, r^2f\}$ という2種類に分けて見ることができます。ここで、 $\{e, r, r^2\} = N$ 、 $\{f, rf, r^2f\} = fN$ と名前をつけます。前章に登場した、 D_3 の正規部分群と剰余類です。つまり、6つの要素を N と fN の2つの仲間として見るということです。

§8.2 変わるもの・変わらぬもの

6つの要素を $N = \{e, r, r^2\}$ と $fN = \{f, rf, r^2f\}$ の2つに分けました。これは、前章で作った商群 $D_3/N = \{N, fN\}$ の2つの要素そのものです。前章では、この2つをそれぞれ一つの要素として扱うと、 $N \circ N = N$ 、 $N \circ fN = fN$ 、 $fN \circ N = fN$ 、 $fN \circ fN = N$ と計算でき、この2つの要素からなる集合が群になることも確認しました。つまり、 D_3 の6つの要素を N と fN の2つにまとめても、合成の仕組みは残っています。本節では、この商群を別の群と比べてみます。

8.2.1 D_3 から C_2 への写像をつくる

ここで、2つの操作からなる群 C_2 を考えます。1枚の紙を、表を上にして机に置きます。表と裏は区別します。操作は、0「何もしない」と、1「紙を裏返

す」の2つだけです。0 はそのまま、1 は表を裏に、裏を表にします。

二つの操作を続けると、次のようになります。

- $0 \circ 0 = 0$ (何もしない→何もしない=何もしないのと同じ)
- $1 \circ 0 = 1$ (何もしない→裏返す=裏返すのと同じ)
- $0 \circ 1 = 1$ (裏返す→何もしない=裏返すのと同じ)
- $1 \circ 1 = 0$ (裏返す→裏返す=何もしないのと同じ)

したがって、 C_2 の計算は次のようになります。

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

図表 8-2 C_2 の演算表

前章で作った商群 D_3/N の計算と並べると、計算の仕組みが同じであることが分かります。

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

↔

$\circ$	N	fN
N	N	fN
fN	fN	N

図表 8-3 D_3/N と C_2 の演算表の比較

そこで、 $N \mapsto 0, fN \mapsto 1$ と対応させます。すると、 D_3 の6つの要素については、 $e, r, r^2 \mapsto 0, f, rf, r^2f \mapsto 1$ となります。先ほどの図でいえば、距離 a にある3点を0、距離 b にある3点を1に対応させます。

このように、ある集合のどの要素にも、別の集合の要素を一つだけ対応させる決まりを、数学では写像といいます。異なる要素が同じ行き先になってもかまいません。今回の写像を ϕ (ファイ) とすると、 D_3 から C_2 へ対応させることは、 $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ と書きます。「 $\rightarrow$ 」は、どこからどこへ写すかを表します。一つ一つの要素の行き先は、 $e \mapsto 0$ のように「 $\mapsto$ 」で表します。「ファイ、 D_3 から C_2 への写像」と読みます。

式で書くと、 $\phi(e) = \phi(r) = \phi(r^2) = 0$ 、 $\phi(f) = \phi(rf) = \phi(r^2f) = 1$ です。ここで大事なのは、 ϕ の行き先が、 N か fN かだけで決まっていることです。 D_3 の 6 つの要素を 2 つにまとめた商群 D_3/N と、2 つの要素からなる群 C_2 には、同じ計算の仕組みがあることが見えてきました。 D_3 と C_2 の間には、何か関係がありそうです。

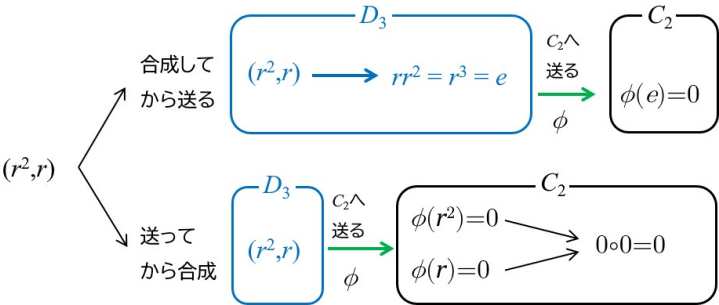
§8.3 準同型

§8.2 では、 D_3 の各要素を C_2 の要素へ送る写像 ϕ を決めました。また、商群 D_3/N と C_2 は、同じ計算の仕組みを持つことも分かりました。しかし、 D_3 の要素を C_2 へ対応させただけでは、この写像が D_3 の合成の仕組みまで保っているかどうかは、まだ分かりません。そこで、二つのやり方を比べます。 D_3 で合成してから C_2 へ送るのと、先に D_3 から C_2 へ送って、そのあと C_2 で合成するのでは、同じ結果になるのでしょうか。確かめてみます。

8.3.1 例 1 先に r^2 、次に r

r^2 と r を、 D_3 で合成してから C_2 へ送る場合と、 C_2 へ送ってから C_2 で合成する場合とを比べます。

先に合成すると、 $rr^2 = r^3 = e$ なので、 $\phi(e) = 0$ です。先に送ると、 $\phi(r^2) = 0$ 、 $\phi(r) = 0$ なので、 $\phi(r) \circ \phi(r^2) = 0 \circ 0 = 0$ です。どちらも 0 です。



図表 8-4 「先に合成」と「先に送る」の比較図

8.3.2 例 2 先に r 、次に f

先に合成すると、 $fr = r^2f$ なので、 $\phi(fr) = \phi(r^2f) = 1$ です。先に送ると、 $\phi(f) = 1$ 、 $\phi(r) = 0$ なので、 $\phi(f) \circ \phi(r) = 1 \circ 0 = 1$ です。同じ 1 になります。

8.3.3 例 3 先に f 、次に f

先に合成すると、 $ff = e$ なので、 $\phi(ff) = \phi(e) = 0$ です。先に送ると、 $\phi(f) = 1$ なので、 $\phi(f) \circ \phi(f) = 1 \circ 1 = 0$ です。同じ 0 になります。

8.3.4 例 4 先に f 、次に r

先に合成すると、 rf なので、 $\phi(rf) = 1$ です。先に送ると、 $\phi(f) = 1$ 、 $\phi(r) = 0$ なので、 $\phi(r) \circ \phi(f) = 0 \circ 1 = 1$ です。同じ 1 になります。

このように、 D_3 で先に動かしてから C_2 へ送っても、先に C_2 へ送ってから C_2 で動かしても、結果は同じでした。 $\phi(g)$ と $\phi(h)$ の値は、 g, h が N と fN

のどちらに属するかだけで決まります。また、前章 (§7.5、問 7-5) で確かめたとおり、 N は正規部分群なので、剰余類どうしの積は代表元の選び方によらず決まります。そのため、 gh がどちらに属するか、つまり $\phi(gh)$ の値も、 g, h の所属だけで決まります。したがって、確かめるべき所属の組合せは 4 通りだけで、例 1～例 4 がその 4 通りにあたります。

8.3.5 準同型

この写像 ϕ のように、「動かしてから送っても、送ってから動かしても、結果が変わらない」写像を準同型といいます。一般に、群 G から群 H への写像 $\phi: G \rightarrow H$ が準同型であるとは、 G のどの二つの要素 g, h についても、 $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ が成り立つことです。

左辺の $\phi(gh)$ は、 G で g と h を合成し、その結果を H へ送ることを表しています。右辺の $\phi(g)\phi(h)$ は、 g と h をそれぞれ H へ送り、 H で合成することを表しています。この二つがいつも同じになることが、準同型の条件です。

§8.4 ショータイムだ！ D_3

ここで、剰余類戦隊 D_3 に登場してもらい、これから説明することを演じてもらいます。

8.4.1 チーム N 、 fN の誕生

司「遊園地 C_2 ランドからヒーローショーの出演依頼が来た。3 人一組で、交互に出演してもらいたい。 e, r, r^2 を基準チームとする」

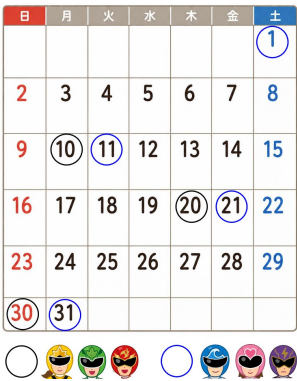
f, rf, r^2f 「私達 3 人は？」

司「 e, r, r^2 を基準に分けると、 f, rf, r^2f は自動的にワンチームだ。 $\{e, r, r^2\}$ をチーム N 、 $\{f, rf, r^2f\}$ をチーム fN と呼ぶことにする」



8.4.2 ショー群を作る

司「出演日は、 N が『末尾が0の日』、 fN が『末尾が1の日』だ。迎えるのバスが来る」



f 「バスって、大型観光バスみたいな？」

司「準同型 ϕ 号だ。間違えて他のに乗らないように」

f 「なーんだ」

e 「今の N, fN だと、均等に分けただけに見えます。チームの特徴を出しましょう」

rf 「特徴って？」

e 「演出の仕方では分かれましょう。チーム N は、照明そのまま。チーム fN は反転させる。天井灯が付いていたら消して、スポット。スポットが付いていたら消して、天井灯。チーム名を操作名にしてしまいましょう。そのままにするのが N 、反転させるのが fN 」

r^2 「すると？」

e 「 $N \circ N = N$ 、 $N \circ fN = fN$ 、 $fN \circ N = fN$ 、 $fN \circ fN = N$ 。会場の照明がどうなるか、表で分かるようになります。私達は剰余類戦隊。演算できるのが強み」

司「さすがは e 。お前には、単位元という称号を与えよう」

e 「私にではなく、特徴を持った私達 N, fN に、新たな名前が必要です」

司「商群 D_3/N としよう。これぞ、まさしくショーのためのグループ、ショー群！」

6人「…」

8.4.3 C_2 ランドへ



D_3 では N



ϕ 号に乗ると「0」

今日は「0の日」。e, r, r^2 たちは、バス ϕ 号に乗車します。彼ら3人は、 D_3 ではチーム N 、グループ分けの基準である正規部分群だと思っていますが、 C_2 では「0さんたち」と呼ばれています。

8.4.4 隠れた「核」

ある日のこと。

司「 ϕ 号で0に送られた者は集まってくれ。君達は様々な呼ばれ方をしているが、さらに、ふさわしい名前を授けよう。 ϕ の核 $\ker \phi$ (ファイの核、カー・ファイ)。どうだ？」

e, r, r^2 「どうって…。そんなチーム名、いつ使うんですか？」

司「大事なことは、すぐには分からないものだよ。諸君」

8.4.5 ヒーローの悩み



また、ある日のこと。

r^2 「ヒーローショーに行きたくありません！」

司「急に、どうした？」

r^2 「私は、ヒーロー r^2 です。それが『0さんたち』ですよ?! なんていうか、

潰されている気分です…」

司「安心しろ。分かる人には分かる」

r^2 「そんな人がどこにいるんですか！ e も r も私も 0 ですよ」

司「やっと『核』の意味が分かる時が来たようだな。 ϕ 号に乗ると、お前たちは『0』だ。しかし、『核』を見れば、お前が、本当は剰余類戦隊チーム N で、 e, r と仲間だということが分かるのだ。『知る人ぞ知る』これこそが本当のヒーローだ。それとも、お前はただの目立ちたがり屋か？」

r^2 「いや、それは…」

司「戦え、 r^2 ！ お前の敵はお前の心だ」

r^2 「はい！ では行って参ります！」

e 「単純ね～」

8.4.6 自然な射影

またまた、ある日。

司「 D_3 の各元は、必ず N か fN のどちらかに所属している。ということで、所属が分かるアプリを作ったぞ。使ってみろ」

r 「私は、 N ですか、 fN ですか」

司「話しかけて使うんじゃない！ アプリの $\pi(\text{---})$ に r と入力するんだ」

$$\pi(r) = N$$

結果



司「名付けて、アプリ名『自然な射影 π 』。なぜかというとな、 D_3 と N が決まった時点で、 r の所属が N であることは自動的に決まるんだ。アプリは表示するだけだ。どうだ、まさに『自然な』だろ？」

r 「紛らわしいんですよ。 π とか ϕ とか」

司「解説しよう。準同型 ϕ 号に乗ると、お前たちはダイレクトに 0 か 1 に運ばれる。また、アプリ π を使えば、まず所属チームが N か fN か分かる。その後、 $N \mapsto 0$ か $fN \mapsto 1$ と読み替えることで、 ϕ 号に乗って 0 か 1 に運ばれたのと同じことになる。例えるなら、乗り換えだ」

r^2f 「何言ってるのかよく分かりませんが、で、今日の指示は？」

司「これだ」



6 人「(文字化けだよ、これじゃ…)」

§8.5 核 (ker) と像 (Im)

§8.3 では、 D_3 から C_2 への準同型写像 ϕ を考えました。 $\phi(e) = \phi(r) = \phi(r^2) = 0$ 、 $\phi(f) = \phi(rf) = \phi(r^2f) = 1$ でした。ここで、 C_2 の 0 は「何もしない」という単位元です。 D_3 のどの元が、この単位元 0 に送られているかというと、 e 、 r 、 r^2 の 3 つです。この 3 つ $\{e, r, r^2\}$ を核と呼びます。

8.5.1 核

準同型写像によって、写した先の単位元に送られる元をすべて集めたものを、その準同型写像の核といいます。核は $\ker$ (カー) を使って表します。今回の準同型写像 ϕ では、 $\ker \phi = \{e, r, r^2\}$ です。 $\ker$ は写像 ϕ に対して「その写像の核」を作る記号です。

$\{e, r, r^2\}$ は、前章で登場した正規部分群 N です。したがって、 $\ker \phi = N$ です。前章で正規部分群として現れた N が、今度は準同型写像の核として現れました。準同型写像 ϕ を通して見ると、 e, r, r^2 はすべて 0 です。 D_3 の中では別々だった3つの操作の違いが、 C_2 へ送ると区別がなくなります。この意味で、核は、準同型写像がどの違いを区別しないのかという指標といえます。

8.5.2 像

今度は、写した先の C_2 を見ます。準同型写像 ϕ によって、 $e, r, r^2 \mapsto 0$ 、 $f, rf, r^2f \mapsto 1$ と送られました。 D_3 の各元が送られた先を集めると、 $\{0, 1\}$ です。この、準同型写像によって送られた先の元をすべて集めたものを、その準同型写像の像といいます。

像は Im (イメージ) を使って表します。今回の準同型写像では、 $\text{Im } \phi = \{0, 1\} = C_2$ です。

今回の準同型写像 ϕ では、 $\ker \phi = N$ 、 $\text{Im } \phi = C_2$ となります。

§8.6 自然な射影

前章では、 $N = \{e, r, r^2\}$ に対して、商群 $D_3/N = \{N, fN\}$ を作りました。

D_3 の各要素は、どちらかの剰余類に入っています。 e, r, r^2 は N に入り、 f, rf, r^2f は fN に入ります。そこで、 D_3 の各要素を、自分が属している剰余類へ送る写像を考えます。 $e, r, r^2 \mapsto N, f, rf, r^2f \mapsto fN$ です。この写像を π (パイ) とすると、 $\pi: D_3 \rightarrow D_3/N$ と書けます。一般には、 $\pi(g) = gN$ です。

この式を確認します。 g として r を選びます。ヒーロー r が §8.4.6 でアプリに入力した演算です。 $\pi(r) = rN = \{re, rr, rr^2\} = \{r, r^2, e\} = \{e, r, r^2\} = N$ となります。したがって、 $\pi(r) = rN = N$ です。

このように、群の各要素を、その要素が属する剰余類へ送る写像を自然な射影 π といいます。

この写像 π も準同型写像です。 D_3 で合成してから剰余類へ送っても、先にそれぞれの剰余類へ送ってから商群 D_3/N で合成しても、同じ結果になります。実際、前章で定めた剰余類どうしの合成 $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ を使うと、 $\pi(gh) = (gh)N = (gN) \circ (hN) = \pi(g) \circ \pi(h)$ です (N が正規部分群なので、この合成は代表元によらず定まります)。 π で商群の単位元 N に送られるのは e, r, r^2 ですから、 $\ker \pi = N$ です。

同じ N なのに、違うの？

$$\ker \pi = \textcircled{N}$$

D_3 の部分集合 (3つの元からなる正規部分群)。 D_3 の住人。

$$\pi(r) = \textcircled{N}$$

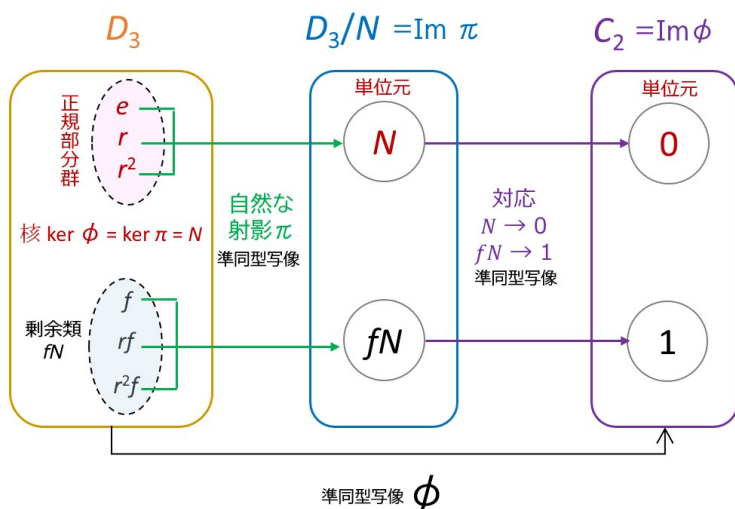
D_3/N の中の1つの元 (単位元)。 D_3/N の住人。

N は、どちらにおいても同じ $\{e, r, r^2\}$ だが、扱われ方が違う。

図表 8-5 自然な射影と核

このことを、復習を兼ねながら確認します。

$\ker \pi$ とは、写像 π に対して「核を取り出さない」という指示です。核は、送り先 D_3/N の単位元 N に送られる元を全部集めたものなので、 $\ker \pi = N$ です。また、 π の送り先の元は N と fN で、これを集めたもの $\{N, fN\}$ は D_3/N です。送り先の元をすべて集めたものは Im なので、 $\text{Im } \pi = D_3/N$ です。



図表 8-6 核と像のまとめ

第8章のまとめ

- 準同型写像とは、群 G から群 H への写像 ϕ で、 $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ を満たすものです。合成してから送っても、送ってから合成しても、結果が同じになります。
- 準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ について、 H の単位元に送られる G の元をすべて集めたものを核といい、 $\ker \phi$ と書きます。核は、準同型によって「どの違いが見えなくなるか」を示す基準です。
- 準同型写像 ϕ によって、実際に到達する元をすべて集めたものを像といい、 $\text{Im } \phi$ と書きます。
- 群 G とその正規部分群 N に対して、各元 g を、その元が属する剰余類 gN に送る写像を自然な射影といいます。 $\pi: G \rightarrow G/N$ 、 $\pi(g) = gN$ と書き、 π も準同型写像です。今回の $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ では、 $\ker \phi = N = \{e, r, r^2\}$ 、 $\text{Im } \phi = C_2$ です。自然な射影 $\pi: D_3 \rightarrow D_3/N$ では、 $\ker \pi = N$ 、 $\text{Im } \pi = D_3/N$ です。

問題

問 8-1

正六角形を 60° 回転させる操作を r とします。回転だけを集めた群 $C_6 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ を考えます ($r^6 = e$ です)。写像 $\phi: C_6 \rightarrow C_2$ を、「回転の回数が偶数なら 0、奇数なら 1」と定めます。つまり、 $\phi(e) = \phi(r^2) = \phi(r^4) = 0$ 、 $\phi(r) = \phi(r^3) = \phi(r^5) = 1$ です。この ϕ は準同型写像です。

- (1) $\phi(r^3r^2)$ と $\phi(r^3) \circ \phi(r^2)$ を計算してください。両者は一致していますか。
- (2) $\ker \phi$ を求めてください。それが核であると、なぜ言えるのか、根拠を述べてください。

(3) $\text{Im } \phi$ を求めてください。 C_2 全体になっていますか。確かめて示してください。

問 8-2

$D_3 = \{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ 、 $N = \{e, r, r^2\}$ とします。自然な射影 $\pi : D_3 \rightarrow D_3/N$ について、次のことに答えてください。

(1) $\pi(r)$ を求めてください。なぜその値になるのか、剰余類 rN の中身を計算して示してください。

(2) $\pi(r^2f)$ を求めてください。剰余類 $(r^2f)N$ の中身も具体的に計算し、根拠を示してください。

(3) $\pi(rf) \circ \pi(f)$ と $\pi(rf \circ f)$ を計算してください。両者は一致していますか。なぜそう言えるのか、 π の性質から説明してください。

解答

8-1

- (1) $r^3 r^2 = r^5$ なので、 $\phi(r^3 r^2) = \phi(r^5) = 1$ です。 $\phi(r^3) \circ \phi(r^2) = 1 \circ 0 = 1$ です。両者は一致します。この計算は、 $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$ という準同型の条件が成り立っている一例です。
- (2) $\ker \phi$ は、 ϕ で C_2 の単位元 0 に送られる元をすべて集めたものです。 0 に送られるのは偶数回の回転 e, r^2, r^4 なので、 $\ker \phi = \{e, r^2, r^4\}$ です。
- (3) $\text{Im } \phi$ は、 ϕ で実際に到達する元をすべて集めたものです。 $\phi(e) = 0$ 、 $\phi(r) = 1$ より 0 にも 1 にも到達するので、 $\text{Im } \phi = \{0, 1\} = C_2$ です。

8-2

- (1) 自然な射影の定義より、 $\pi(r) = rN$ です。 $rN = \{re, rr, rr^2\} = \{r, r^2, e\} = \{e, r, r^2\} = N$ となるので、 $\pi(r) = N$ です。
- (2) 自然な射影の定義より、 $\pi(r^2 f) = (r^2 f)N$ です。 $(r^2 f)N = \{r^2 f, (r^2 f)r, (r^2 f)r^2\} = \{r^2 f, rf, f\} = fN$ なので、 $\pi(r^2 f) = fN$ です。
- (3) $\pi(rf) = fN$ 、 $\pi(f) = fN$ なので、 $\pi(rf) \circ \pi(f) = fN \circ fN = N$ です。
一方、 $rf \circ f = r$ なので、 $\pi(rf \circ f) = \pi(r) = N$ です。両者は一致します。
 π が準同型写像なので、 $\pi(g \circ h) = \pi(g) \circ \pi(h)$ が成り立つからです。

第9章 準同型定理

第8章の最後に、 D_3/N と $\text{Im } \phi$ が同じ計算の仕組みを持つことにたどり着きました。本章では、これが D_3 だけの話ではないことを確かめます。これが、こままでの到達目標である準同型定理です。

§9.1 核を使えば商群を作れる？

第7章、第8章で行ったことを確認します。

(1) 第7章で商群を作りました。ただし、商群を作れるのは正規部分群で割るときだけでした。

(2) 第8章で、 D_3 から C_2 への準同型写像 ϕ を作りました。

$$\phi(e) = \phi(r) = \phi(r^2) = 0, \phi(f) = \phi(rf) = \phi(r^2f) = 1.$$

そして、核と像を求めました。

$$\ker \phi = \{e, r, r^2\} = N, \text{Im } \phi = \{0, 1\} = C_2.$$

(3) では、どんな準同型写像でも核は正規部分群になるのでしょうか。ここだけ一般の準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ で確かめます。 G, H の単位元をそれぞれ e_G, e_H とします。

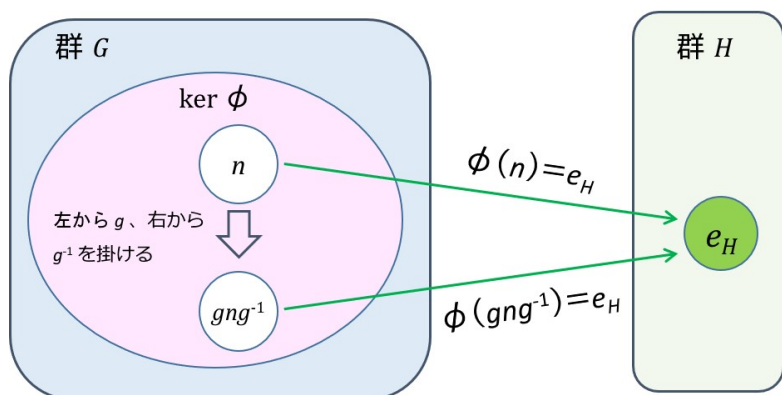
まず、準同型について2つの性質を確認します。1つ目は、単位元は単位元に移ることです。 $\phi(e_G) = \phi(e_G e_G) = \phi(e_G) \phi(e_G)$ なので、両辺の左から $\phi(e_G)^{-1}$ を掛けると、 $\phi(e_G) = e_H$ となります。

2つ目は、逆元は逆元に移ることです。 $\phi(a) \phi(a^{-1}) = \phi(aa^{-1}) = \phi(e_G) = e_H$ なので、 $\phi(a^{-1})$ は $\phi(a)$ の逆元です。したがって、 $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$ となりま

す。

この2つを使って、まず $\ker \phi$ が部分群であることを確かめます。 $\phi(e_G) = e_H$ なので、 $e_G \in \ker \phi$ です。また、 $a, b \in \ker \phi$ なら、 $\phi(a) = \phi(b) = e_H$ です。したがって、 $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = e_H e_H = e_H$ なので、 $ab \in \ker \phi$ です。さらに、 $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1} = e_H^{-1} = e_H$ なので、 $a^{-1} \in \ker \phi$ です。よって、 $\ker \phi$ は G の部分群です。

次に、 $\ker \phi$ が正規部分群であることを確かめます。 $n \in \ker \phi$ と、任意の $g \in G$ を取ると、 $\phi(n) = e_H$ なので、 $\phi(gng^{-1}) = \phi(g)\phi(n)\phi(g^{-1}) = \phi(g)e_H\phi(g)^{-1} = e_H$ となります。したがって、 $gng^{-1} \in \ker \phi$ です。つまり、核の元 n の左から g 、右から g^{-1} を掛けても、結果は再び核の中に入ります。



図表 9-1 核の元 n の左から g 、右から g^{-1} を掛けても、結果は再び核の中に入る

では、この結果を第7章の正規部分群の条件につなげます。第7章では、すべての $g \in G$ について、左から掛けてできる $g \ker \phi$ と、右から掛けてできる $(\ker \phi)g$ が一致すれば、正規部分群だと確認しました。いま得られた $gng^{-1} \in \ker \phi$ を使って、この2つが一致することを示します。

二つの集合が等しいことは、互いに含まれる ($\subseteq$ と $\supseteq$) ことを示して確かめ

ます。

まず、 $g \ker \phi \subseteq (\ker \phi)g$ を示します。 $g \ker \phi$ の任意の元を1つ取ります。この元は、ある $n \in \ker \phi$ を使って gn と書けます。 gn が $(\ker \phi)g$ に入ることを示すために、式の見方を2つ切り替えます。

1つ目は、 gn という積の分解のしかたです。ふつう gn という式を見たら「 g に n を掛けた」と読みます。ここでは、 gn を「 $\ker \phi$ の元と g の積」という形に直したいので、次の等式に注目します。

$$gn = (gng^{-1})g$$

この等式は、次のように確かめられます。

$$(gng^{-1})g = gn(g^{-1}g) = gne_G = gn$$

です。最初の等号では結合則を使い、次に $g^{-1}g = e_G$ 、最後に単位元の性質を使っています。

したがって、 gn は、 $gn = (gng^{-1})g$ と書き換えることができます。見方としては、「 g に n を掛けた」から、「 gng^{-1} に g を掛けた」へ変わっています。

2つ目は、 gng^{-1} をひとかたまりの元と見ることです。 gng^{-1} は3つの元の積ですが、前段落の結果から $gng^{-1} \in \ker \phi$ なので、これは $\ker \phi$ の元1つです。すると $gn = (gng^{-1}) \cdot g$ は「 $\ker \phi$ の元と g の積」の形になります。 $(\ker \phi)g$ の定義は「 $\ker \phi$ の元と g の積を集めたもの」なので、 $gn \in (\ker \phi)g$ です。

したがって、 $g \ker \phi$ のどの元も $(\ker \phi)g$ に入るので、 $g \ker \phi \subseteq (\ker \phi)g$ です。

逆向きも同じ考え方で示します。 $(\ker \phi)g$ の任意の元は、ある $n \in \ker \phi$ を使って ng と書けます。ここでも ng の見方を切り替えます。 $ng = g \cdot (g^{-1}ng)$ と分解し、 $g^{-1}ng$ をひとかたまりと見ます。前段落の結果を g の代わりに g^{-1} に対して使うと、 $g^{-1}ng \in \ker \phi$ です。そこで $m = g^{-1}ng$ とおけば $m \in \ker \phi$ で

あり、 $ng = gm \in g \ker \phi$ となります。したがって、 $(\ker \phi)g \subseteq g \ker \phi$ です。

g は G のどの元でもよかったので、すべての $g \in G$ について $g \ker \phi = (\ker \phi)g$ となります。これは第7章で確認した正規部分群の条件そのものです。つまり、 $\ker \phi$ は正規部分群です。

(1)～(3)を合わせると、準同型写像 ϕ の核 $\ker \phi$ で群を割れば、商群を作ることができると言えます。確認します。

$\ker \phi = N$ なので、作られる商群は $D_3 / \ker \phi = D_3 / N = \{N, fN\}$ です。中身を書くと、 $N = \{e, r, r^2\}$ 、 $fN = \{f, rf, r^2f\}$ です。演算は第7章で調べたとおり、 $N \circ N = N$ 、 $N \circ fN = fN$ 、 $fN \circ N = fN$ 、 $fN \circ fN = N$ となります。

§9.2 「0」に来たのは、どのチーム？

「0」として同じ扱いを受けている e, r, r^2 を、 C_2 ランドのスタッフ目線で見てください。

e, r, r^2 は、どこから来たのでしょうか。チーム N です。同じように、1へ来た f, rf, r^2f は、チーム fN です。式で書くと、 $N = \{e, r, r^2\} \rightarrow 0$ 、 $fN = \{f, rf, r^2f\} \rightarrow 1$ となります。

まず、 $e, r, r^2 \rightarrow 0$ を見ていきます。たとえば $g = e$ 、 $h = r$ とすると、 $\phi(e) = \phi(r) = 0$ です。一方、 $e^{-1}r = r$ であり、 r は $\ker \phi = N = \{e, r, r^2\}$ に入っています。同じことは、 e と r^2 、 r と r^2 についても成り立ちます。

つまり、「 ϕ で同じところへ行く2つの元は、核で作った同じ剰余類に入っている」...①になっています。

では、同じことが一般の g, h でも成り立つのでしょうか。

「 ϕ で同じところへ行くもの」を式で表すと、 $\phi(g) = \phi(h)$...②です。②が成り立つなら、§9.1(3) で確認した「逆元も逆元へ送られる」という性質から、 $\phi(g^{-1})$ は $\phi(g)$ の逆元です。さらに②より、 $\phi(h) = \phi(g)$ なので、 $\phi(g^{-1}h) = \phi(g^{-1})\phi(h) = \phi(g)^{-1}\phi(g) = e_H$ となります。

つまり、 $g^{-1}h \in \ker \phi$ です。

逆に、 $g^{-1}h \in \ker \phi$ なら、 $\phi(g^{-1}h) = e_H$ です。したがって、 $\phi(g)^{-1}\phi(h) = e_H$ となり、両辺の左から $\phi(g)$ を掛けると、 $\phi(h) = \phi(g)$ です。

以上から、 $\phi(g) = \phi(h) \iff g^{-1}h \in \ker \phi$...③となります。

§5.6 では、2つの元 g, h が同じ左剰余類にいるのは、 $g^{-1}h$ がその部分群に入るときだと確認しました。今回は、その部分群が $\ker \phi$ です。

したがって、 $g^{-1}h \in \ker \phi$ であることと、 g と h が核による同じ剰余類にいることは同じです。

③と合わせると、 $\phi(g) = \phi(h)$ であることと、 g と h が核による同じ剰余類にいることは、同じことだと分かりました。

ヒーローたちで例えると、次のようになります。

C_2 ランドで同じ「0」として扱われるヒーローたちは、出発前から核による同じチームに入っていました。そして、核による同じチームにいたヒーローは、 ϕ で送ると同じ場所へ着きます。

つまり、 ϕ が同じものとして見るチームと、核によって分けたチームは、ぴったり一致しています。

9.2.1 計算の仕組みまで同じか

$\circ$	N	fN
N	N	fN
fN	fN	N

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

図表 9-2 左: $D_3/\ker \phi$ の演算表、右: $\text{Im } \phi$ の演算表

$N \longleftrightarrow 0$ 、 $fN \longleftrightarrow 1$ と読み替えると、2つの表は完全に一致します。名前が違っただけで、計算の仕組みは同じです。

§9.3 準同型定理

ここまでで、「 $D_3/\ker \phi$ と $\text{Im } \phi$ は、元が一一に対応し、計算の仕組みも同じである」...④が分かりました。このような関係に、名前を付けます。

2つの群の元が全部一一に対応し、しかも計算の仕組みまで同じであるとき、この2つの群は同型であるといい、同型を表す記号 $\cong$ で結びます。「計算の仕組みまで同じ」とは、その対応を σ (シグマ) と書くと、どの2つの元 a, b についても $\sigma(a \circ b) = \sigma(a) \circ \sigma(b)$ が成り立つことです。いまの例では $\sigma(N) = 0$ 、 $\sigma(fN) = 1$ という対応で、図表 9-2 の2つの表がこの式のとおりに一致しています。

したがって、④は $D_3/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ ($D_3/\ker \phi$ と $\text{Im } \phi$ は同型である」と読む) と書くことができます。

すると、「これは D_3 だけの現象だろうか。一般にはどうだろう」という問いが浮かびます。

なお、準同型写像の像 $\text{Im } \phi$ は、行き先の群の中で、それ自身も群になります**1。ですから、一般の場合にも $G/\ker \phi$ と $\text{Im } \phi$ を2つの群として比べることができます。

****1** §9.1(3) で確認したことを使えば分かります。像の元 $\phi(a), \phi(b)$ を合成すると、 $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$ も像に入ります。また、 $e_H = \phi(e_G)$ も像に入り、 $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$ も像に入ります。

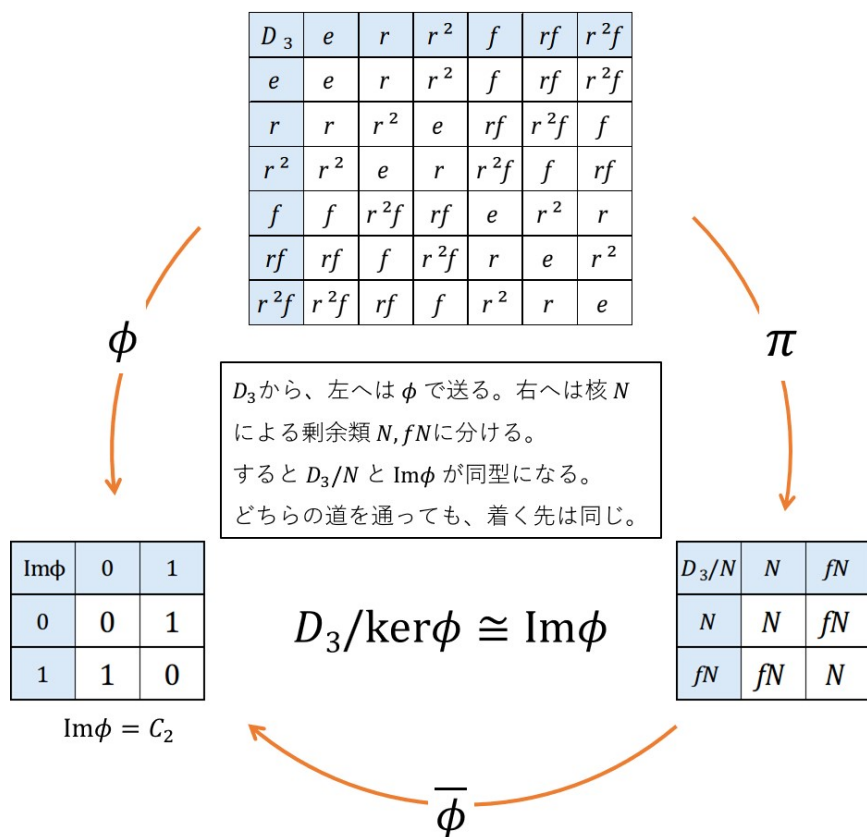
実は、一般に、次が成り立ちます。群の準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ に対して、

$$G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$$

これを、準同型定理といいます。証明は、問 9-1 で行います。

準同型定理を言葉にすると、「 ϕ が区別しないものを、核を使って最初から同じものとしてまとめてしまえば、残った商群は、 ϕ で実際に見えている像と、ぴったり同じ構造になる」ということです。

第4章では、人が「同じ仲間」の線を引きました。第5章では、その線を引く数学的な根拠が剰余類として与えられ、第7章では剰余類を元として計算する商群を作り、第8章では準同型写像によって同じものとして扱われる元を核として捉えました。そして本章で、それらがこの一本の式にまとまりました。



図表 9-3 準同型写像と商群を経由する経路

D_3 から $\text{Im}\phi$ へ着く経路を表しています。左は ϕ で直接送る道、右は自然な射影 π で剰余類に分けてから $\bar{\phi}$ (ファイバー) で送る道です。 $\bar{\phi}$ は剰余類 gN を受け取って、その代表元 g の行き先 $\phi(g)$ を答える対応で、式で書くと $\bar{\phi}(gN) = \phi(g)$ です。この $\bar{\phi}$ が対応として本当にきちんと定まるか、そして計算の仕組みまで保つかは、問 9-1 で確かめます。この図は D_3 の場合です。一般の群 G でも同じ形で $G/\ker\phi \cong \text{Im}\phi$ が成り立ちます。

9.3.1 問 8-1 で確認した例

問 8-1 では、 C_6 から C_2 への準同型について、 $\ker \phi = \{e, r^2, r^4\}$ 、 $\text{Im } \phi = C_2$ を求めました。ここでの ϕ は、問 8-1 で使った写像です。ここで $K = \ker \phi$ とすると、§9.1 で確認したように K は正規部分群なので、商群を作ることができます。 $C_6/K = \{K, rK\}$ となり、 $K \leftrightarrow 0$ 、 $rK \leftrightarrow 1$ と対応させると、計算の仕組みは C_2 と同じになります。つまり、問 8-1 で調べた準同型でも、 $C_6/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ となります。

§9.4 「像」はどこにある？

準同型定理は $G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ でした。第 8 章で、この右辺 $\text{Im } \phi$ を「像」と呼ぶことを確認しました。ところで、この像はどこにあるのでしょうか。今回の ϕ では、像は C_2 全体でした。では、像はいつも行き先として用意された集合全体になるのでしょうか。

ここでは、 $C_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ という群を使います。 C_4 では、数字を足したあと、4 で割った余りをその値とします。これを「mod4 の加法」**2 といいま

****2** これについての具体的な計算の練習は、第 10 章の問 10-1 で行います。

この C_4 を行き先として、写像 $\psi: D_3 \rightarrow C_4$ **3 を考えます。 e, r, r^2 を 0 へ、 f, rf, r^2f を 2 へ送る写像で、 ψ はブサイと読みます。

****3** これが本当に準同型写像になっているか、第 10 章の問 10-4 で確かめます。

ヒーローたちにもう一度登場してもらい、像がどこにあるかを探してみます。

9.4.1 サイン会だ、 D_3 !

新たな任務

ヒーローたちに、 C_2 ランド横のホテル C_4 からサイン会の依頼が来ました。

司「また2チームに分かれて行ってほしい。 e, r, r^2 は0のつく日、 f, rf, r^2f は2のつく日だ。 ψ 号が迎えに来る」

r^2 「また『0』になれと？」

司「行き先が違えば、別の任務だ」

f 「今度は、私たちは『2』さん？」

司「すごいぞ。楽屋が4つもあるんだ」

e 「全部使っていいんですか？」

司「入るのは『0様』と書かれた部屋だけだそうだ」

r^2 「やっぱり『0』じゃん！」

ψ 号にて



r^2 「俺はヒーローなのに。サイン会って……。俺の人生は終わった……」

e 「仕方ないでしょ。私たちの行き先をなんて言うか、知らないの？」

r 「ホテル C_4 でしょ？」

e 「終域。わかった？ 終域。大事なことから2回言いました」

r「本当に、終わってるなあ」



C_4 につくと、0 さんたちは楽屋に案内されました。そこには、部屋が4つありました。

r「ここは、どこ？」

e「だから、終域だって教えたでしょ！」

r^2 「嫌だー、心が潰されるー！」

r「落ち着けて。ほら、『2 様』という部屋もあるよ。f たちの部屋だね」

像

そのころ、ホテルのスタッフはサイン会の準備をしていました。

支配人「そろそろ、0 様たちを呼んできて」

スタッフ「どこにいるんですか？」

支配人「『像』にいる」

スタッフ「像？」

支配人「0 様と 2 様が到着する部屋。まとめて『像』って呼ぶ」

スタッフ「あそこ、一番奥だから『終域』って言うのじゃなかったんですか？」

支配人「準備した部屋が『終域』。実際に入る部屋は、全部をまとめて『像』と呼ぶ」

写像の、行き先として用意された集合を「終域」といいます。出発の集合が A 、行き先として用意された集合が B なら、 B が終域です。では、終域と像 ($\text{Im } \psi$) は、どう違うのでしょうか。

今回の $\psi: D_3 \rightarrow C_4$ では、 e, r, r^2 が 0 へ、 f, rf, r^2f が 2 へ行きます。すると、終域は $C_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ ですが、実際に到達するのは $\text{Im } \psi = \{0, 2\}$ だけです。1 と 3 には、対応するヒーローが誰もいません。第 10 章で、この ψ が準同型写像になっていることを確認すれば、準同型定理から、商群 $D_3 / \ker \psi$ と一対一に対応する相手は C_4 全体ではなく、 $\{0, 2\} = \text{Im } \psi$ だと分かります。

つまり、準同型定理では、終域は「行き先として用意した箱」、像は「実際に到達した元を集めたもの」で、商群と対応するのは像です。終域と像をはっきり区別する必要があります。

第 9 章のまとめ

- 準同型写像の核は正規部分群なので、 $\ker \phi$ で割って商群 $G / \ker \phi$ を作ることができる。
- ϕ で同じところへ行く元は、ちょうど核による同じ剰余類に入っている。だから剰余類と像の元が一対一に対応する。対応させると計算の仕組みまで一致する。この関係を同型といい、 $\cong$ で書く。
- 一般に $G / \ker \phi \cong \text{Im } \phi$ が成り立つ。これを準同型定理という。右辺は終域ではなく、像 ($\text{Im } \phi$) であることに注意する。

問題

答えるときは、根拠となる性質や定義を示し、必要な計算も書いてください。

問 9-1

群 G 、 H と準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ について、 $N = \ker \phi$ とします。 H の単位元を e_H とします。次の対応を考えます。

$$\bar{\phi}: G/N \rightarrow \text{Im } \phi, \quad \bar{\phi}(gN) = \phi(g)$$

これは、剰余類 gN を受け取って、その代表元 g の行き先を答える対応です。

1. $gN = hN$ から、 $\phi(g) = \phi(h)$ を示してください。

2. $\bar{\phi}((gN)(hN)) = \bar{\phi}(gN)\bar{\phi}(hN)$ を示してください。

3. $\bar{\phi}(gN) = \bar{\phi}(hN)$ から、 $gN = hN$ を示してください。剰余類の判定を使ってください。

4. $\text{Im } \phi$ の元を 1 つ取り、その元に送られる G/N の剰余類を示してください。

5. (1)～(4) により、 G/N と $\text{Im } \phi$ について何が言えますか。

問 9-2

準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ について、核がいちばん小さい場合と、いちばん大きい場合を考えます。 G, H の単位元をそれぞれ e_G, e_H とします。

1. $\ker \phi = \{e_G\}$ の場合、 $G/\ker \phi$ は G とどのような関係になりますか。準同型定理から、 G と $\text{Im } \phi$ の関係を答えてください。

2. $\ker \phi = G$ の場合、 $\text{Im } \phi$ と $G/\ker \phi$ を求めてください。両者はどのような関係になりますか。

解答

9-1 準同型定理を一般に確かめます。§9.1 までに用意した道具だけで示せます。

1. 代表元を変えても値が変わらないことを確かめます。 $gN = hN$ なので、剰余類の判定 (§5.6) より、 $g^{-1}h \in N = \ker \phi$ です。したがって、 $\phi(g^{-1}h) = e_H$ となります。 N は $\ker \phi$ だからです。 ϕ は準同型写像なので、 $\phi(g^{-1}h) = \phi(g^{-1})\phi(h)$ です。さらに、§9.1(3) より、 $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ なので、 $\phi(g)^{-1}\phi(h) = e_H$ となります。両辺に左から $\phi(g)$ を掛けると、 $\phi(h) = \phi(g)$ です。したがって、 $gN = hN$ なら、どちらの代表元を選んでも $\bar{\phi}$ の値は同じになります。これで、同じ剰余類のどの代表元を選んでも $\bar{\phi}$ の値が変わらないことが確認できました。これが、 $\bar{\phi}$ が well-defined である、ということです。

2. 計算を保つことを確かめます。商群の演算から、 $(gN)(hN) = (gh)N$ です。したがって、 $\bar{\phi}((gN)(hN)) = \bar{\phi}((gh)N) = \phi(gh)$ となります。一方、 $\bar{\phi}(gN)\bar{\phi}(hN) = \phi(g)\phi(h)$ です。 ϕ は準同型写像なので、 $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ が成り立ちます。したがって、 $\bar{\phi}((gN)(hN)) = \bar{\phi}(gN)\bar{\phi}(hN)$ です。両者が一致するのは、商群では $(gN)(hN) = (gh)N$ と計算し、さらに ϕ が計算を保つ準同型写像だからです。

3. 違う剰余類は違うところへ行くことを確かめます。 $\bar{\phi}(gN) = \bar{\phi}(hN)$ とすると、 $\phi(g) = \phi(h)$ です。 $\bar{\phi}(gN) = \phi(g)$ 、 $\bar{\phi}(hN) = \phi(h)$ だからです。両辺に左から $\phi(g)^{-1}$ を掛けると、 $e_H = \phi(g)^{-1}\phi(h)$ となります。§9.1(3) より、 $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1})$ なので、 $e_H = \phi(g^{-1})\phi(h) = \phi(g^{-1}h)$ です。したがって、 $g^{-1}h \in \ker \phi = N$ となります。これは、 $gN = hN$ ということです。剰余類の判定で、 $g^{-1}h \in N$ なら g と h は N による同じ剰余類に入るか

らです。したがって、行き先が同じなら、もともと同じ剰余類だったことになります。つまり、違う剰余類が同じところへ潰れることはありません。

4. 像の元には全部到達することを確かめます。 $\text{Im } \phi$ の元を1つ取ります。

像の定義から、その元は、ある $g \in G$ を使って $\phi(g)$ と書けます。一方、 $\bar{\phi}(gN) = \phi(g)$ なので、その元には剰余類 gN から到達します。したがって、 $\text{Im } \phi$ のどの元にも、送られてくる剰余類があります。

5. (1)～(4) により、 G/N と $\text{Im } \phi$ は、元が一一に対応し、計算の仕組みも同じです。したがって、 G/N と $\text{Im } \phi$ は同型です。 $N = \ker \phi$ なので、 $G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ が言えます。これが準同型定理です。

なお、(1) で確かめたことは、第7章で商群の演算について確かめたことと同じ形をしています。第7章では、「同じ剰余類の中からどの代表元を選んでも、答えが同じ剰余類になる」ことを確かめました。今回は、「同じ剰余類の中からどの代表元を選んでも、 $\bar{\phi}$ の行き先が変わらない」ことを確かめました。どちらも well-defined の話です。剰余類の代表元を使って演算や写像を定めるときは、いつもこの確認が必要になります。

9-2 準同型定理が、(1) 核が単位元だけの場合、(2) 核が群全体の場合にも成り立つことを確認します。

1. $\ker \phi = \{e_G\}$ の場合、 $G/\{e_G\}$ の剰余類は $g\{e_G\} = \{g\}$ なので、 G の各元がそれぞれ1個だけを含む別々の剰余類になります。対応 $g \mapsto \{g\}$ は元を一対一に対応させます。また $\{g\}\{h\} = \{gh\}$ なので、計算の仕組みも同じです。したがって、 $G \cong G/\ker \phi$ です。問7-4で $D_3/\{e\}$ について見た場合と同じです。一方、準同型定理から、 $G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ です。この2つの対応を続けてたどると、 $g \mapsto \{g\} \mapsto \bar{\phi}(\{g\}) = \phi(g)$ となります。つまり、 ϕ そのものが G から $\text{Im } \phi$ への対応になっています。どち

らの段も元を一対一に対応させるので、続けてたどっても一対一です。さらに $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ なので、計算の仕組みも同じです。したがって、 $G \cong \text{Im } \phi$ となります。この場合、核に入っているのは単位元 e_G だけなので、 ϕ によって違う元が同じものとしてまとめられることはありません。 G の計算の仕組みがそのまま像に残っています。

2. $\ker \phi = G$ の場合、 G のすべての元が e_H に送られます。したがって、 $\text{Im } \phi = \{e_H\}$ です。一方、 $G/\ker \phi = G/G = \{G\}$ です。 $\text{Im } \phi$ も $G/\ker \phi$ も、元が1個の群ですから、 $G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ となります。この場合は、 G のすべての元が核に入っているので、すべての違いが1つにまとめられています。

核に入る元が少なければ、まとめられる元も少なくなります。核に入る元が多ければ、より多くの元が一つにまとめられます。準同型定理は、核が単位元だけの場合から群全体の場合まで成り立っています。

第 10 章 確認問題 2

答えるときは、根拠となる性質や定義を示し、必要な計算も書いてください。

。は適宜省略していますが、必要なときは書いています。「あとから行う操作を左に書く」ことに変更はありません。

準備 mod (モッド) と C_n の加法

- 「 $\text{mod } n$ 」とは、「 n で割った余りだけを見る」という意味です。このとき n を「法」といいます。たとえば、7 を 3 で割ると余りは 1 なので、 $7 \equiv 1 \pmod{3}$ と書き、「7 と 1 は 3 を法として合同」と読みます。
- 第 8 章では $C_6 = \{e, r, \dots, r^5\}$ のように回転の記号で書きましたが、この章では C_n を $\{0, 1, \dots, n-1\}$ で表します。普通に足したあと、その和を n で割った余りを答えとする加法を考えます。たとえば、 $C_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ では、 $3 + 2 = 5$ と普通に足したあと、5 を 4 で割った余り 1 を答えとします。したがって、 C_4 では $3 + 2 = 1$ です。この演算を $\text{mod } n$ の加法とし、 $+$ で書きます。
- 第 8 章の $C_2 = \{0, 1\}$ の演算 $\circ$ ($1 \circ 1 = 0$ など) は、 $\text{mod } 2$ の加法と同じ計算です。この章では、 C_2 の演算も $+$ で書きます。

問題

問 10-1

次の加法を計算してください。

- (1) C_4 で $2 + 2$
- (2) C_4 で $3 + 3$

問 10-2

$C_9 = \{0, 1, \dots, 8\}$ (mod 9 の加法)、 $C_3 = \{0, 1, 2\}$ (mod 3 の加法) とします。上の準備と同じ要領で、 C_9 では 9 で割った余りを、 C_3 では 3 で割った余りを答えにします。たとえば C_9 では $7 + 5 = 12 \equiv 3 \pmod{9}$ です。

写像 $\phi: C_9 \rightarrow C_3$ 、 $\phi(x) = x$ を 3 で割った余り を考えます。

なお、 $\phi(x+y)$ の $+$ は C_9 の加法、 $\phi(x) + \phi(y)$ の $+$ は C_3 の加法です。同じ記号ですが、別の群の演算です。

- (1) $\phi(7+5)$ と $\phi(7) + \phi(5)$ を計算してください。さらに、一般の $x, y \in C_9$ について $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ を示してください。「3 で割った余り」という ϕ の定義を使ってください。
- (2) $\ker \phi$ を求めてください。
- (3) $C_9 / \ker \phi$ の異なる剰余類をすべて書き、演算表を作ってください。
- (4) $\text{Im } \phi$ を求め、 $C_9 / \ker \phi$ との対応を示してください。また、 $|C_9|$ 、 $|\ker \phi|$ 、 $|\text{Im } \phi|$ を求め、このことから何が言えますか。

問 10-3

C_9 を、 $\ker \phi$ とは違う分け方で 3 組に分けてみます。

$$X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}, Z = \{6, 7, 8\}$$

これも 9 個を 3 個ずつに分けています。

組どうしの計算を、次のように決めてみます。「それぞれの組から代表元を 1 つ選んで足し、その答えが入る組を、組どうしの計算の答えとする」。この決め方がうまくいくかを調べます。

- (1) X は C_9 の部分群ですか。閉じているかどうかから示してください。
- (2) X から 0 と 0 を選んで $0+0$ を、2 と 2 を選んで $2+2$ を計算してください。それぞれの結果は X, Y, Z のどこに入りますか。この結果から、上の決め方で「 X と X の計算」の答えを 1 つに定められるか答えてください。
- (3) 今回の失敗と、第 7 章で扱った $H = \{e, f\}$ の失敗の違いを説明してください。

問 10-4

§9.4 では、写像 $\psi: D_3 \rightarrow C_4$ を、 $\psi(e) = \psi(r) = \psi(r^2) = 0$ 、 $\psi(f) = \psi(rf) = \psi(r^2f) = 2$ と定めました。これが本当に準同型写像になっているかを、ここで確かめます。 C_4 の加法は、本章冒頭の準備を参照してください。

- (1) g, h がそれぞれ $N = \{e, r, r^2\}$ と fN のどちらに属するかで 4 通りに分け、 gh の所属、 $\psi(gh)$ 、 $\psi(g) + \psi(h)$ を表にし、4 通りすべてで両者が一致することを示してください。
- (2) $\ker \psi$ と $\text{Im } \psi$ を求めてください。 C_4 のどの元には届いていませんか。
- (3) 準同型定理を使って、 $D_3 / \ker \psi$ と同型になる群を答えてください。また、 $|\ker \psi|$ と $|\text{Im } \psi|$ を使って $|D_3| = 6$ を掛け算で表し、 $|C_4| = 4$ を使った場

合と比べてください。

- (4) f を 1 へ送る準同型写像 $\theta: D_3 \rightarrow C_4$ は作れますか。 $f \circ f = e$ を使って示してください。

問 10-5

D_3 の 6 つの要素を、3 桁の符号で表すことにします。

$$e = 000, r = 001, r^2 = 010, f = 100, rf = 101, r^2f = 110$$

この 3 桁は D_3 の要素につけた符号であり、2 進数として足したりビット演算をしたりするものではありません。演算はこれまでどおり D_3 の演算で行います。右 2 桁は、回転の部分が e, r, r^2 のどれかを表します。3 通りなら 00, 01, 10 で足りるので、11 は使いません。

- (1) 次の合成を計算してください。 D_3 の元で答えを出したあと、3 桁の符号に戻してください。

① $001 \circ 010 (= r \circ r^2)$ ② $010 \circ 100 (= r^2 \circ f)$

③ $100 \circ 001 (= f \circ r)$ ④ $101 \circ 101 (= rf \circ rf)$

- (2) (1) ①～④について、今度は一番左の桁だけを見てください。

- ① 合成した 2 つの符号について、一番左の桁だけを書いてください。答えの一番左の桁も書いてください。

- ② ①の結果から、2 つの符号の一番左の桁がそれぞれ 0, 0 / 0, 1 / 1, 0 / 1, 1 のとき、答えの一番左の桁がどうなるかを、規則としてまとめてください。

- ③ この 4 通りは、どの群の演算表と同じですか。また、4 例だけでなくすべての合成で同じ規則が成り立つことを、問 10-4(1) の表を使って説明してください。

ヒント：一番左の桁が 0 の e, r, r^2 はすべて回転、1 の f, rf, r^2f はすべ

て鏡映を含む操作です。§7.3 で見た N と fN です。

- (3) 今度は反対に、一番左の桁を捨てて、右 2 桁だけで計算できるか調べます。

① $001 \circ 001$ と $101 \circ 101$ を計算し、それぞれ答えの右 2 桁を書いて、比べてください。合成する 2 つの符号の右 2 桁は、どちらも 01, 01 です。

② 右 2 桁だけを使った「計算」を 1 つに決められるか教えてください。

- (4) 一番左の桁が同じ要素どうしをまとめると、 $A_0 = \{000, 001, 010\}$ 、 $A_1 = \{100, 101, 110\}$ の 2 組になります。右 2 桁が同じ要素どうしをまとめると、 $B_{00} = \{000, 100\}$ 、 $B_{01} = \{001, 101\}$ 、 $B_{10} = \{010, 110\}$ の 3 組になります。

① A_0 は $N = \{e, r, r^2\}$ と一致していますか。 A_1 は N によるどの剰余類ですか。中身を書き直して確かめてください。

② B_{00} は $H = \{e, f\}$ と一致していますか。 rH と r^2H を計算し、 B_{01} 、 B_{10} と比べてください。

③ 右剰余類 Hr を計算して rH と比べ、 $H = \{e, f\}$ が正規部分群かどうか教えてください。第 7 章で見た左剰余類・右剰余類の判定を使ってください。

- (5) 3 桁の符号の一番左の桁を答える写像 $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ を考えます。同じ ϕ という文字を使いますが、問 10-2 の $\phi: C_9 \rightarrow C_3$ とは別の写像です。

① $\phi(000)$ 、 $\phi(001)$ 、 $\phi(010)$ 、 $\phi(100)$ 、 $\phi(101)$ 、 $\phi(110)$ を書いてください。この写像は、第 8 章で作った $D_3 \rightarrow C_2$ の写像と同じですか。また、 $\ker \phi$ と $\text{Im } \phi$ を求めてください。 $\ker \phi$ は 3 桁の符号ではどの組にあたりますか。

② 準同型定理を使って、 $D_3 / \ker \phi$ と同型になる群を教えてください。

③ 問 10-5 の、(2) と (3) の違いを、核・正規部分群・準同型を使って説明してください。

解答

10-1

- (1) 0 (2) 2

10-2

- (1) $\phi(7+5) = \phi(3) = 0$ です。 $\phi(7) + \phi(5) = 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$ です。

両者は一致します。

次に、一般の $x, y \in C_9$ について考えます。 $\phi(x) = r$ 、 $\phi(y) = s$ とすると、 ϕ の定義から $x = 3a + r$ 、 $y = 3b + s$ と書けます。ただし、 a, b は整数です。したがって、整数としての和について $x + y = 3(a + b) + (r + s)$ となります。よって、整数 $x + y$ を 3 で割った余りは、 $r + s$ を 3 で割った余りに等しくなります。これは C_3 での $r + s$ 、つまり $\phi(x) + \phi(y)$ です。一方、 C_9 での $x + y$ は、この整数の和から 9 の倍数を引いて 0~8 に戻したものです。9 は 3 の倍数なので、この操作では 3 で割った余りは変わりません。したがって、 $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ が成り立ちます。つまり、 ϕ は準同型写像です。

- (2) C_3 の単位元は 0 です。 $\phi(x) = 0$ となるのは $x = 0, 3, 6$ なので、 $\ker \phi = \{0, 3, 6\}$ です。核は、準同型によって行き先の単位元に送られる元を全部集めたものです。

- (3) 核 $K = \{0, 3, 6\}$ とすると、 $C_9/K = \{K, 1 + K, 2 + K\}$ です。中身は、 $K = \{0, 3, 6\}$ 、 $1 + K = \{1, 4, 7\}$ 、 $2 + K = \{2, 5, 8\}$ です。この 3 つで C_9 の 9 個の元が重なりなく全部入っているため、異なる剰余類はこの 3 つです。演算表は次のとおりです。

+	K	$1+K$	$2+K$
K	K	$1+K$	$2+K$
$1+K$	$1+K$	$2+K$	K
$2+K$	$2+K$	K	$1+K$

- (4) ϕ の値として $0, 1, 2$ がすべて現れるので、 $\text{Im } \phi = \{0, 1, 2\} = C_3$ です。 C_3 の演算表は次のとおりです。

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

ここで、 $K \leftrightarrow 0$ 、 $1+K \leftrightarrow 1$ 、 $2+K \leftrightarrow 2$ と対応させると、2つの表は完全に一致します。したがって、 $C_9/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ です。第9章の準同型定理と同じ形になっています。

それぞれの元の数、 $|C_9| = 9$ 、 $|\ker \phi| = 3$ 、 $|\text{Im } \phi| = 3$ です。よって、 $9 = 3 \times 3$ となり、 $|C_9| = |\ker \phi| \times |\text{Im } \phi|$ が言えます。

第8章で作った $D_3 \rightarrow C_2$ では $6 = 3 \times 2$ と数えられ、問8-1の $C_6 \rightarrow C_2$ でも $6 = 3 \times 2$ と数えられます。どちらも第9章で準同型定理を確かめた例です。今回は $9 = 3 \times 3$ です。答えが C_2 にならない場合でも、同じ仕組みが成り立っています。

補足 この ϕ は数独を塗り分ける操作でもある

C_9 の足し算の表は、行の並びだけを $0, 3, 6 \mid 1, 4, 7 \mid 2, 5, 8$ の順にして、列は $0, 1, \dots, 8$ のままにし、数字と要素を次のように対応させることができます。

数字	1	4	7	2	5	8	3	6	9
要素	0	1	2	3	4	5	6	7	8

図表 10-1 数字と要素の対応

この対応を使うと、次の完成数独になります。

1	4	7	2	5	8	3	6	9
2	5	8	3	6	9	1	4	7
3	6	9	1	4	7	2	5	8
4	7	2	5	8	3	6	9	1
5	8	3	6	9	1	4	7	2
6	9	1	4	7	2	5	8	3
7	2	5	8	3	6	9	1	4
8	3	6	9	1	4	7	2	5
9	1	4	7	2	5	8	3	6

図表 10-2 完成数独

行にも列にも 3×3 ブロックにも、1 から 9 が 1 回ずつ現れています。この対応では、数字 $\{1, 2, 3\}$ が要素 $\{0, 3, 6\} = \ker \phi$ に、 $\{4, 5, 6\}$ が $\{1, 4, 7\}$ に、 $\{7, 8, 9\}$ が $\{2, 5, 8\}$ に対応します。つまり ϕ は、この数独を $1, 2, 3 \rightarrow 0$ 、 $4, 5, 6 \rightarrow 1$ 、 $7, 8, 9 \rightarrow 2$ と塗り分ける操作です。塗り分けたあとの色は、行が $0, 3, 6 \mid 1, 4, 7 \mid 2, 5, 8$ のどの組に属するかと、列がこの 3 組のどれに属するかだけで決まります。3 つの行の組と 3 つの列の組をそれぞれ 1 つにまとめて読むと、色の規則は C_3 の演算表と同じになります。9 種類を区別する世界から、3

種類だけを区別する世界へ移ります。それが $C_9/\ker \phi \cong C_3$ です。

10-3

(1) X は部分群ではありません。たとえば、 $1, 2 \in X$ ですが、 $1 + 2 = 3 \notin X$ です。 X の中の元どうしを足した結果が X の外へ出てしまい、閉じていないので、 X は部分群ではありません。

(2) $0 + 0 = 0$ で、 $0 \in X$ なので、結果は X に入ります。 $2 + 2 = 4$ で、 $4 \in Y$ なので、結果は Y に入ります。

どちらも X の中から代表元を選んだのに、答えの入る組が X になったり Y になったりしています。代表元の選び方によって答えの組が変わるので、この分け方では「 X と X の計算」の答えを1つに決められません。

今回の X, Y, Z は、そもそも部分群による剰余類ではありません。群の計算を組どうしの計算へ持ち越すための土台ができていないからです。

(3) 第7章の $H = \{e, f\}$ は部分群でした。そのため、左剰余類や右剰余類を作ること自体はできました。しかし、 H は正規部分群ではなかったので、剰余類どうしの演算を1つに決められませんでした。今回の X は、そもそも部分群ではありません。したがって、部分群による剰余類を作る段階にまだ到達していません。

つまり、失敗には段階があります。第7章の H は部分群の段階までは進んでいましたが、正規部分群ではありませんでした。商群として計算を持ち越すには、正規部分群による剰余類が必要です。 $\ker \phi = \{0, 3, 6\}$ による分け方がうまくいったのは、準同型の核が必ず正規部分群になるからです。

10-4

(1) g と h の所属で 4 通りに分けます。

g の所属	h の所属	gh の所属	$\psi(gh)$	$\psi(g) + \psi(h)$
N	N	N	0	$0 + 0 = 0$
N	fN	fN	2	$0 + 2 = 2$
fN	N	fN	2	$2 + 0 = 2$
fN	fN	N	0	$2 + 2 = 0$

表の「 gh の所属」は、次のことから決まります。 $N = \{e, r, r^2\}$ は回転だけの集合、 $fN = \{f, rf, r^2f\}$ は鏡映を含む操作の集合です。回転と回転を合成すると回転、回転と鏡映を合成すると鏡映、鏡映と回転を合成しても鏡映、鏡映と鏡映を合成すると回転になります。したがって、 gh がどちらに入るかは、 g と h がそれぞれどちらに入るかだけで決まります。

4 通りすべてで、 $\psi(gh) = \psi(g) + \psi(h)$ が成り立っています。 ψ の値は、 g が N と fN のどちらに入るかだけで決まります。したがって、この 4 通りを確かめれば、 D_3 のすべての組み合わせを確かめたことになります。よって、 ψ は準同型写像です。

(2) C_4 の単位元は 0 です。 $\psi(g) = 0$ となるのは e, r, r^2 です。したがって、 $\ker \psi = \{e, r, r^2\} = N$ です。一方、 ψ の値として実際に現れるのは 0 と 2 だけなので、 $\text{Im } \psi = \{0, 2\}$ です。1 と 3 には届いていません。

(3) 準同型定理から、 $D_3 / \ker \psi \cong \text{Im } \psi$ です。今回は、 $\text{Im } \psi = \{0, 2\}$ なので、 $D_3 / \ker \psi \cong \{0, 2\}$ です。ここで $\{0, 2\}$ は C_4 の部分群であり、 $0 + 0 = 0$ 、 $0 + 2 = 2$ 、 $2 + 2 = 0$ となるので、 C_2 と同型です。したがって、 $D_3 / \ker \psi \cong \{0, 2\} \cong C_2$ です。右辺に書くのは終域 C_4 ではなく、実際に届いた像です。

元の数を見ると、 $|\ker \psi| = 3$ 、 $|\operatorname{Im} \psi| = 2$ なので、 $|D_3| = 6 = 3 \times 2$ です。一方、終域 C_4 の元数は 4 なので、 $6 \neq 3 \times 4$ です。 C_4 には、どの元も送られてこない 1 と 3 が含まれています。そのため、商群と対応する相手として C_4 全体を使うことはできません。準同型定理の右辺が $\operatorname{Im} \psi$ なのは、像が「実際に届いた範囲」だからです。

- (4) f を 1 へ送る準同型写像 $\theta: D_3 \rightarrow C_4$ は作れません。 D_3 では、 $f \circ f = e$ です。準同型なら、 $\theta(f \circ f) = \theta(f) + \theta(f)$ でなければなりません。また、準同型写像は単位元を単位元へ送るので、 $\theta(e) = 0$ です。したがって左辺は 0 です。

ところが $\theta(f) = 1$ とすると、右辺は $1 + 1 = 2$ です。したがって、 $0 \neq 2$ となり、準同型の条件に反します。なお、 $\theta(f) = 3$ とした場合も、 C_4 では $3 + 3 = 2$ なので、同じく不可能です。

f の行き先として使えるのは 0 か 2 です。行き先は自由に決められるのではなく、元の演算関係を保つように決める必要があります。

10-5

- (1) ① $001 \circ 010 = r \circ r^2 = r^3 = e = 000$
 ② $010 \circ 100 = r^2 \circ f = r^2 f = 110$
 ③ $100 \circ 001 = f \circ r = r^2 f = 110$
 ④ $101 \circ 101 = (rf) \circ (rf) = e = 000$

(2) ① 一番左の桁だけを取り出すと、次のようになります。

例	1 つ目の左端	2 つ目の左端	答えの左端
①	0	0	0
②	0	1	1
③	1	0	1
④	1	1	0

② 2 つの符号の一番左の桁が 0, 0 のとき答えの一番左の桁は 0、0, 1 のとき 1、1, 0 のとき 1、1, 1 のとき 0 です。

③ これは C_2 の演算表と同じです。 C_2 の加法で書くと、次のとおりです。
 $0+0=0$ 、 $0+1=1$ 、 $1+0=1$ 、 $1+1=0$ です。4 例だけの偶然ではありません。一番左の桁が 0 の e, r, r^2 は N の元であり、1 の f, rf, r^2f は fN の元です。問 10-4(1) の表では、 gh の所属が、 g と h がそれぞれ N と fN のどちらに入るかで決まっていました。一番左の桁は N か fN かを表す桁なので、 D_3 のどの合成でも、答えの一番左の桁は 2 つの一番左の桁だけで決まります。3 桁全部を知らなくても、一番左の桁だけなら計算できます。右 2 桁の違いを見なくても、一番左の桁の計算は壊れません。

(3) ① $001 \circ 001 = r \circ r = r^2 = 010$ なので、答えの右 2 桁は 10 です。 $101 \circ 101 = (rf) \circ (rf) = e = 000$ なので、答えの右 2 桁は 00 です。合成する 2 つの符号の右 2 桁は、どちらも 01, 01 です。しかし、答えは 10 と 00 に分かれ、一致しません。

② したがって、右 2 桁だけを使った計算を 1 つに決めることはできません。入力として見えている右 2 桁が同じなのに、元が一番左の桁によって答

えが変わります。一番左の桁を捨てて右 2 桁だけを残すと、計算は壊れます。

(4) ① $A_0 = \{000, 001, 010\} = \{e, r, r^2\} = N$ です。また、 $A_1 = \{100, 101, 110\} = \{f, rf, r^2f\} = fN$ です。したがって、 A_0, A_1 は N による 2 つの剰余類です。

② $B_{00} = \{000, 100\} = \{e, f\} = H$ です。次に、 $rH = \{r, rf\} = \{001, 101\} = B_{01}$ 、 $r^2H = \{r^2, r^2f\} = \{010, 110\} = B_{10}$ です。したがって、 B_{00}, B_{01}, B_{10} は H による左剰余類です。

③ 右剰余類を計算すると、 $Hr = \{e \circ r, f \circ r\} = \{r, r^2f\}$ です。一方、 $rH = \{r, rf\}$ なので、 $rH \neq Hr$ です。左剰余類と右剰余類が一致していないので、 $H = \{e, f\}$ は正規部分群ではありません。そのため、 H による剰余類を使って商群の演算を定めることはできません。第 7 章で見た失敗が、右 2 桁だけを残した場合にもう一度現れています。

(5) ① 一番左の桁を答えるので、 $\phi(000) = \phi(001) = \phi(010) = 0$ 、 $\phi(100) = \phi(101) = \phi(110) = 1$ です。これは、第 8 章で作った $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ と同じ写像です。 D_3 の元を 3 桁の符号で書き直ただけです。

核は、0 に送られる元を全部集めたものなので、 $\ker \phi = \{000, 001, 010\} = A_0 = N$ です。この写像は一番左の桁だけを見ているので、 A_0 の中にある右 2 桁の違い 00, 01, 10 は区別されません。

また、実際に現れる値は 0 と 1 なので、 $\text{Im } \phi = \{0, 1\} = C_2$ です。3 桁から右 2 桁の違いを見なくなったあとに、残っている一番左の桁が像です。

② 準同型定理から、 $D_3 / \ker \phi \cong \text{Im } \phi = C_2$ です。

③ 問 10-5(2) では、一番左の桁だけを残しても計算が壊れません。一番左の桁を答える写像が準同型だからです。このとき核は $N = \{e, r, r^2\}$

で、 N は正規部分群です。したがって、 N による剰余類どうしの計算を定めることができます。

一方、右 2 桁が同じ元をまとめると、 $H = \{e, f\}$ による左剰余類が現れます。ここで、右 2 桁の 3 種類に群演算を定め、右 2 桁を答える写像が準同型になったと仮定します。単位元 $e = 000$ の右 2 桁は 00 なので、 00 に送られる元を集めた $B_{00} = \{000, 100\} = H$ がその核になります。しかし、準同型の核は必ず正規部分群であり、 H は正規部分群ではありません。したがって、右 2 桁の 3 種類に群演算を定めて、右 2 桁を答える写像を準同型にすることはできません。これは、問 10-5(3) ①で、合成する 2 つの符号の右 2 桁が同じなのに、答えの右 2 桁が異なったことと同じ事情です。

つまり、この問題で見たのは、「情報を捨てても計算が残る捨て方と、捨てると計算が壊れる捨て方がある」ということです。準同型は計算の仕組みを保つ写像であり、異なる元を同じ像に送るときには情報がまとめられます。そのとき、同じものとして見えなくなった違いをまとめる基準が核です。

準同型定理 $D_3 / \ker \phi \cong \text{Im } \phi$ は、「核でまとめた世界」と「実際に残った像の世界」が同じ計算の仕組みを持つ、と言っています。

第10章のまとめ

- $C_9 \rightarrow C_3$ でも準同型定理が成り立つ。このとき $C_9/\ker \phi \cong C_3$ であり、 $9 = 3 \times 3$ となる。
- 行き先として用意した終域のすべてに届くとは限らない。実際に届いた範囲が像であり、準同型定理は像を使う。 $D_3 \rightarrow C_4$ では $6 = 3 \times 2$ であり、 $6 = 3 \times 4$ ではない。
- 3桁の符号の一番左だけを見る写像では、右2桁の違いが見えなくなる。核は $\{000, 001, 010\}$ 、像は $\{0, 1\}$ で、 $6 = 3 \times 2$ となる。
- 情報のまとめ方には、計算の仕組みが残るものと壊れるものがある。情報をまとめても計算の仕組みを保つのが準同型であり、どの違いを同じものとして見るかを表すのが核である。

000	001	010	100	101	110
-----	-----	-----	-----	-----	-----

第 11 章 機械と音楽をつなぐ「群」

ついに、副題である「ねじ・音楽・群」にたどり着きました。機械（時計とねじ）と音楽に共通する構造を見つけていきます。

この章には、音源や、実際に操作できる教材があります。音楽を聴いたり、時計やねじ、キューブを動かしたりするには、Web 版が便利です。下記のリンクからご覧いただけます。

[Web 版「機械と音楽をつなぐ『群』」](#)

§11.1 歯車 — 回りて、再び出会う

まず、下記の直積時計から見てください。画像をクリックすると開きます。アプリとして、デスクトップに置けます。



直積時計

この時計は、1時間ごとに正三角形は 120° 、正方形は 90° 、正12角形は、 30° 回転します。三つの図形が別々のリズムで動きます。三角形には向きを示す印が付いているので、 120° 回しても、どの状態にあるかが分かります。

三角形と正方形だけを見て、時刻を読むことができます。三角形は3通りのどれか、正方形は4通りのどれか、必ずどこかにいます。二つを組にして書くと、12時間の間に次のように変わります。

時刻	三角形	正方形
0時	0	0
1時	1	1
2時	2	2
3時	0	3
...	...	...
11時	2	3

3と4は1以外に共通の約数をもたない（互いに素である）ので、（三角形、正方形）の組は12時間のあいだ一度も重複せず、12通りすべてが現れます。だから二つの図形だけで時刻が決まります。

このように、ものを動かしたときに、動きどうしの間に現れる関係を、「構造」と呼ぶことにします。

直積時計は、3通りと4通りの動きが重なり、12通りで一巡して元に戻る、という構造です。言い換えると、別々の周期で動くものが組み合わせざって、新しい一つの周期が現れる。「回って、再び出会う」です。

直積時計を見ていたら、こんなことが思い浮かびました。

それぞれの周期で回り、時に重なり、離れ、また重なる。私が感じる時間とは、同時に進んでいるものの重なりではないのか。

人間は「時間そのもの」を見ることはできません。見ているのは変化です。四

季が巡る。潮が満ちて引く。朝になり、夜になる。月が満ち欠けする。花が咲いて、散る。それぞれ周期も位相も違い、それぞれのリズムで進んでいる。それでも、ある瞬間には重なる。それぞれ別の現象なのに、それらの変化を重ねて、人は時間を実感している。

「違う周期で動くものを、同時に見ると何が見えるのだろう」

人は、そこに何かの関係を見るのかも知れません。

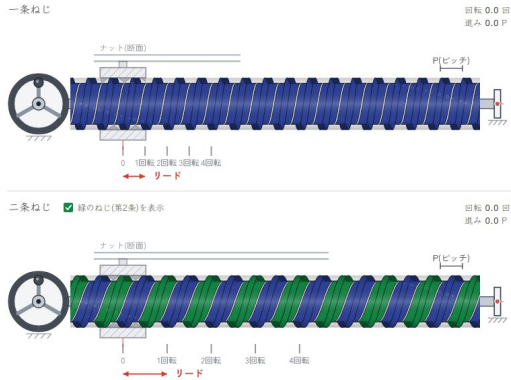
§11.2 ねじ — 前進か後退か

日常で最も目にするねじは、ドライバーで回して締める、いわゆる「ねじ」だと思います。



これは、機械の用語でいうと、一条ねじといいます。ねじの螺旋が一本です。螺旋が二本のものは、二条ねじといいまして、びんのふた、ペットボトルのキャップの一部などに使われています。

下記は、一条ねじと二条ねじの違いをみえるようにしたコンテンツです。画像をクリックすると、ブラウザー上でハンドルを回して、部品を動かすことができます。



一条ねじ・二条ねじ

ねじの山同士の間隔をピッチといいます。一条ねじなら、ハンドル1回転でねじ1ピッチ。二条ねじなら1回転で2ピッチ分進みます。ハンドルの回転の速さは同じでも、ナットの進む速さが変わります。

二条ねじでは、1回転ごとに1ピッチ飛ばして、2ピッチ先に進むことになります。この「2つずつ進む」という形は、あとで音楽の中にもう一度出てきます。

§11.3 構造で見る、ねじと歯車

ねじと歯車（時計）の違いは、なんでしょう。

時計の針は、回転していれば、いずれ同じ場所に戻ってきます。三角形も3回、正方形なら4回で戻ります。ところが、ねじは、同じ向きに回し続けるかぎり、同じ場所には戻りません。

ねじを締める向きをプラス、緩める向きをマイナスとして、1回転、2回転、3回転と数えていくと、...、-3、-2、-1、0、1、2、3、...という整数の並びと同じ形が現れます。輪ではありません。両側にどこまでも続いていく直線です。

歯車は「輪」の中を巡って元に戻る。ねじは「直線」の上を進み、同じ向きに

回すかぎり戻らない。違う構造をしています。

では、ねじと歯車に、共通する構造はあるでしょうか。

一つ目は、元に戻す動きがあることです。1時間進めた時計は1時間戻せば元に戻り、1回転締めたねじは1回転緩めれば元に戻ります。

二つ目は、動きを重ねても、同じ種類の動きになることです。時計を2時間進めて、さらに3時間進めれば、合わせて5時間進めたのと同じです。ねじを2回転締めて、さらに3回転締めれば、合わせて5回転締めたのと同じです。動きを組み合わせても、時計の動き、ねじの動きの範囲内です。

輪と直線という違いがあっても、動きどうしの関係には、こうした共通する構造があります。数学では、このような構造をもつ動きの集まりを、「群」^{**1}と呼びます。歯車の動きも、ねじの動きも、群の一例です。次の節では、「群」を音楽の中に探してみます。

^{**1} 群の定義については、巻末の「用語のまとめ」を参照。

§11.4 音楽に現れる「群」

「ハッピーバースデー」を、続けて二つ聴いてください。

「▶再生」をクリックすると、ブラウザーで音声が開き、再生されます。自動で再生されない場合は、開いた画面で再生ボタンを押してください。

1. Happy Birthday (原形)

Happy Birthday (原形)

♩ = 180



▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

2. Happy Birthday (移調)

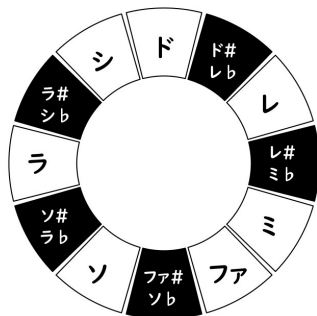
Happy Birthday (移調)

♩ = 180



▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

音の高さは違いますが、どちらも「ハッピーバースデー」だと分かります。二つ目（移調）は、一つ目（原形）の全部の音を上げたものです。すべての音を、音どうしの関係を保ったまま移動させたので、「ハッピーバースデー」に聞こえます。この操作を「移調」と呼びます。



ピアノの鍵盤を見ると、1 オクターブが12 の半音に分かれています。半音ずつ12 回上がると、始めた音と同じ名前の音（1 オクターブ上のドなど）に戻ります。音名も、時計と同じように「12 個の輪」として描けます。移調は、この輪全体を同じだけずらすことです。時計の目盛りを1 目盛り進めると、似ていませんかい**2。

もう一つ、違う動かし方があります。

3. Happy Birthday（反行）

Happy Birthday（反行）

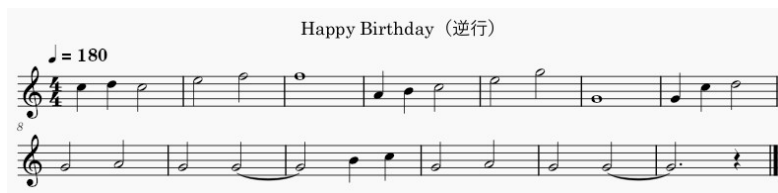
♩ = 180

▶ 再生

[MIDI をダウンロード](#)

原曲で上がっているところが下がっています。音の高さを、鏡で映したような形です。この動きを「反行」と呼びます。反行を2 回すると、上下が入れ替わって、また入れ替わって、元に戻ります。

4. Happy Birthday (逆行)



▶ 再生

[MIDI をダウンロード](#)

今度は音符の並び方を、後ろから読んでいます。音そのものを逆再生したわけではありません。ここでは、音の長さは元のままで、音の高さの並びだけを最後から順に読んでいます。この動きを「逆行」と呼びます。逆行を2回すると、後ろから読んで、また後ろから読んで、元に戻ります。

反行と逆行を、両方かけたらどうなるでしょうか。

5. Happy Birthday (反行逆行)



▶ 再生

[MIDI をダウンロード](#)

上下も、前後も、両方鏡で映した形になります。先に反行してから逆行しても、先に逆行してから反行しても、結果は同じです。

これで、原形・反行・逆行・反行逆行という4つの形ができました。原形のまま何もしない場合も一つの操作と考えると、この4つの操作のどれとどれを組み合わせても、答えは必ずこの4つのどれかになります。反行と逆行を組み合わせ

れば反行逆行、反行逆行に反行を重ねれば逆行、といった具合です。外から新しいものは出てきません。これで、§11.3 で歯車とねじにあった二つの性質が、音楽の中にも現れました。ハッピーバースデーに対する動きも、群として扱えます。

いくつかの形を同時に鳴らしてみます。まず 3 つ、次に 4 つを重ねてみます。

6. Happy Birthday (3 重)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

7. Happy Birthday (4 重)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

移調と反行、逆行を組み合わせることもできます。

8. Happy Birthday (移調&反行逆行)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

****2** 時計の 12 と音楽の 12 は、由来としては別のものです。時計の 12 は、古代エジプトなどで昼や夜を 12 に分けて時刻を数えた歴史につながっています。現代のピアノでは、オクターブを 12 の等しい半音に分ける十二平均律が一般的です。両者に直接の由来関係はありませんが、どちらも「12 個で一巡する輪」です。

§11.5 12 音技法とシェーンベルク

違う音の並びでも、反行や逆行を試してみます。今度は、1 オクターブにある 12 種類の音を 1 回ずつ使った音列で試してみます。

♯1
♩ = 120

12音列 (原形)



12音列 (反行)



12音列 (逆行)



12音列 (反行逆行)



9. 12 音列 (原形)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

10. 12 音列 (反行)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

11. 12 音列（逆行）

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

12. 12 音列（反行逆行）

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

こうした音の並びと、原形・反行・逆行・反行逆行、さらにそれらを移調したものを組み合わせて作曲する方法を、12 音技法といいます。20 世紀の作曲家シェーンベルクが発展させました**3。その実例の一つが《ピアノ組曲作品 25》です。

A. シェーンベルク《ピアノ組曲 作品 25》第 5 曲「メヌエットとトリオ」

演奏：Glenn Gould Source: Glenn Gould Official Artist Channel / Sony Classical

▶ [YouTube で見る](#)

****3** アルノルト・シェーンベルク（1874–1951）。オーストリア生まれの作曲家。1 オクターブにある 12 種類の音の一つずつ含む音列を作曲の基礎に置き、原形・反行・逆行・反行逆行、さらにそれらの移調を用いて曲を組み立てる 12 音技法を発展させました。20 世紀後半のアメリカでは、ミルトン・パピット、アレン・フォート、ジョゼフ・ストラウスといった音楽学者や作曲家が、こうした操作の集まりを数学の言葉で整理する研究を進めました。

§11.6 バッハ — 反行と逆行を駆使した作曲家

反行や逆行は、20 世紀に発明されたものではありません。ずっと古くから、作曲家たちは同じ動きを作品の骨組みに使ってきました。

13. バッハ「蟹のカノン」

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

18 世紀の作曲家バッハの曲です**4。一つの旋律を、一方は頭から、もう一方は末尾から演奏すると、二つの旋律が同時に成立します。逆向きに読んでもびつたり合うメロディーを、およそ 280 年前に人が書いていました。

もう一つ、バッハの「螺旋のカノン」の仕組みを、教材用音源で聴いてみます。

14. バッハ「螺旋のカノン」の仕組み（教材用音源）

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

短いメロディーが、少しずつ上がっていきます。1 回終わるごとに、全体が 2 半音（全音）ずつ上がって、また同じメロディーが始まります。6 回上がると $2 \times 6 = 12$ 半音、つまり 1 オクターブ上に到達して、始めた音と同じ名前の音に戻ります。音の 12 個の輪の上を、2 半音ずつ 6 回進んで一巡する形です。

このとき、「音名の輪」の上で通る移調の位置は、12 個のうち 6 個だけです。§11.2 で見た二条ねじが 1 回転ごとに山を 1 つ飛ばして進んだのと、同じ形が音楽の中にも現れています。機械の中で見た動きが、音楽の中にもあります。

時計の三角形は 3 時間で戻りました。螺旋のカノンは、メロディーが 2 半音ずつ上がる動きを 6 回繰り返して、元の音名に戻ります。「輪の上を巡って戻る」が、280 年前の音楽の中にも入っていました。

バッハは数学を用いて作曲したわけではありませんが、曲の構造は、数学で記述できるような形をしています。バッハが会員であった「音楽学術協会」は「数学と哲学によって音楽を発展させる」ことを掲げており、作曲において数学的な構

造を意識していたとしても不思議はありません。

実際の演奏は、こちらから聴けます。

J. S. Bach 《音楽の捧げもの》BWV 1079/4 「蟹のカノン」

演奏：Shunske Sato Video: Netherlands Bach Society / All of Bach

▶ [YouTube で見る](#)

J. S. Bach 《音楽の捧げもの》BWV 1079/8 「Canon a 2 per tonos」（螺旋のカノン）

演奏：Shunske Sato (violin)、Leo van Doeselaar (fortepiano) Video: Netherlands Bach Society / All of Bach

▶ [YouTube で見る](#)

****4** ヨハン・ゼバスティアン・バッハ (1685–1750)。「音楽の捧げもの」(1747)に、「蟹のカノン」と「螺旋のカノン」(原題 Canon per Tonos、「無限に上昇するカノン」とも呼ばれる)が含まれています。螺旋のカノンは、反復するたびに全音上へ転調するよう作られており、繰り返せば理論上どこまでも上昇していきます。この章の音源は、王の主題（フリードリヒ大王が示した主題）の冒頭8音を全音ずつ上げて7回並べた教材用のもので、原曲を単声化したものではありません。

§11.7 違うもののの中に同じものを見つける

時計を1時間進める。ハンドルを1回転させる。音を1半音上げる。反行を1回かける。歯車、ねじ、音楽。別々に見えるものに、共通する構造が現れていました。

振り返ると、見えてきた構造は、次の3つです。

1. 繰り返すと元に戻るものがある（歯車、音名、反行）。戻らないものもある

(ねじ)。

2. どれにも、元に戻す動きがあります。進めた時計は戻せる。締めたねじは緩められる。反行は2回で元に戻る。
3. 動きを重ねても、持っている動きの範囲から出ない。時計を2時間進めて、さらに3時間進めれば、5時間進めた動きになる。反行と逆行を組み合わせれば反行逆行。持っていないものは、作られない。

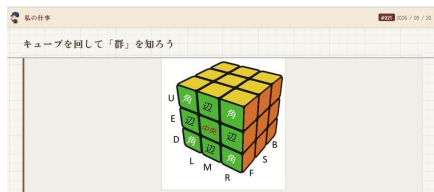
時計、ねじ、移調、反行と逆行、シェーンベルクの音列、バッハのカノン。同じ仕組みが、機械の中にも、音楽の中にも入っていました。違うものの中にある「同じ」もの。これを扱う数学が「群論」です。

身の回りを「群」の目で見渡してみると、「あれも群かな？ これも群と言えるかな？」という視点が生まれます。機械と音楽のように、共通点を挙げるのが難しいと思っていたものの中に、同じ構造、共通する何かを持っていることに気づかされます。

§11.8 キューブを回して「群」を知ろう

ルービックキューブの回転操作の集まりも、群です。同じ操作を繰り返すと、いつか元に戻ります。操作を組み合わせても、集まりの外には出ません。順番を変えると結果が変わることもあり、音楽の移調と反行の組み合わせも、その一つです。

キューブを操作しながら群の考え方を学ぶ Web 教材を作りました。画像をクリックすると開きます。10 のステップで、置換、逆元、非可換、位数などの用語を体験できます。間違えてもヒントが出るので、まず動かしてみてください。



キューブを回して「群」を知ろう

§11.9 群論基礎クイズ

第1章から第11章までの内容を、3択で確かめることができるクイズを作りました。下記の画像をクリックすると開きます。



群論基礎クイズ

第11章のまとめ

- 「群論」とは、違うものの中にある「同じ」ものを扱う数学である。数式や記号を使わなくても、「群」という視点でみると、新しい気づきが生まれる。

第 12 章 用語のまとめ

各語の後ろの「p. ○」は、その語を本文で定義している頁です。定義の頁だけとしました。本文で定義していない語には、頁を付けていません。

位数 (いすう) p.27

群の要素の数。群 G の位数 (要素の個数) を表すには、 $|G|$ と書く。読み方は「ジーの位数」。絶対値記号と同じ形。例： $|D_3| = 6$ 。

well-defined (ウェル・ディファインド) p.140

「きちんと定義できる」という意味。本書で扱う well-defined とは、代表元をどれに選んでも、答えが同じものに決まること。本書では、第 7 章「正規部分群と商群」で、剰余類を 1 つの要素として計算するとき、同じ剰余類の中からの代表元を選んでも、答えが同じ剰余類になることを確かめた。この部分が well-defined の話である。

可換群 (かかんぐん)

すべての要素で、 $a \circ b = b \circ a$ が成り立つ群。アーベル群ともいう。

例：巡回群はすべて可換である。有限巡回群 C_2 、 C_4 、 C_{12} などがある。

核 (かく) p.121

準同型によって、行き先の単位元に送られる要素を全部集めたもの。ker ϕ (カー) と書く。たとえば $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ で、 e, r, r^2 がすべて 0 に送られるなら、 $\ker \phi = \{e, r, r^2\}$ となる。核に入っている要素は、 ϕ で送った先では見えなくな

る。核は「準同型写像が何を区別しないのか、という指標」ということができる。

逆元（ぎゃくげん） p.27

「 a を打ち消す操作」のこと。群 G のある要素 a に対して、合成すると単位元 e になる要素。式で書くと、 $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ 。

群（ぐん） p.26

次の4つの条件を満たす操作の集まり。

- (1) 操作を組み合わせても、元の集まりの中に収まる（閉性）
- (2) 何もしない操作がある（単位元を持つ）
- (3) どの操作にも、元に戻す操作がある（逆元を持つ）
- (4) 同じ順番で操作するなら、途中をどこで区切っても結果は変わらない（結合則）

群論（ぐんろん） p.13

群の性質を調べる数学。

ケーリーグラフ p.19

群の元（本書では、元と一対一に対応する状態）を点で表し、生成元を左から合成するとどの点へ移るかを、矢印で示した図。本書の図表 1-7 では、 r と f による移り変わりを描いている。生成元を繰り返して、群の元をすべてたどれる様子が見える。

結合則（けつごうそく） p.24

三つの元を続けて演算するとき、順序を変えずに、まとめ方（括弧の付け方）だけを変えても結果が同じになる性質。 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ と表す。結合法

則ともいう。順序を入れ替える交換則 ($a \circ b = b \circ a$) とは異なる。

元 (げん)

群を作っている1つ1つの要素。「要素」と同じ意味で、群論では「元」と呼ぶことが多い。群 G の元 g を、 $g \in G$ と書く (g は G の元である」と読む)。
本書で扱う群 (D_3 、 C_n など) の元はどれも、図形や時計を動かす操作である。
そのため本文では、同じものを「操作」「要素」「元」と呼んでいる。例: D_3 の元は e, r, r^2, f, rf, r^2f の6個。

関連語: 単位元、逆元、生成元、代表元 (どれも、この意味の「元」である)。

合成 (ごうせい) p.18

操作を続けて行い、一つの操作としてまとめること。本書では、先に h 、次に g を行う合成を $g \circ h$ と書く。あとから行う操作を左に書く。 $g \circ h$ は、 $\circ$ を省いて gh と書くこともある。

式の書き方 p.18

e に 120° 時計回りの回転を加えることは、 $r \circ e = r$ とかく。 $\circ$ は「操作を加える」という意味の記号。操作は、左側に書き加える。群は、操作の順番を変えると、結果が異なることがある。

指数 (しすう) p.71

群 G の部分群を H としたとき、 G を H で割ったときの剰余類の個数。
 $[G : H]$ と書き、「 G における H の指数」と読む。

G が有限群のとき、指数を n とすると、

$$n = \frac{|G|}{|H|} = [G : H]$$

である ($\frac{|G|}{|H|}$ は、「 H の位数・分の・ G の位数」と読む)。

例： $|G| = 6$ 、 $|H| = 2$ なら、 $n = 3$ 。

自然な射影 (しぜんなしゃえい) p.122

群の各要素を、「自分が入っている剰余類」へ送る写像のことで、 π (パイ) と書く。正規部分群 N で商群 G/N を作るとき、 $\pi: G \rightarrow G/N$ として、 g を gN に送る。細かい要素の違いを見ず、同じ剰余類の仲間を一つにまとめる写像と考えればよい。

写像 (しゃぞう) p.113

集合 A の各要素に、集合 B の要素を 1 つずつ対応させる規則。 A を写像の「出発の集合」、 B を写像の「行き先の集合」と呼び、対応関係を $f: A \rightarrow B$ のように書く。

終域 (しゅういき) p.138

写像の「行き先として用意された集合」。たとえば $f: A \rightarrow B$ なら、 B が終域。実際に到達したものだけを集めた集合が「像」である。

巡回群 (じゅんかいぐん) p.32

一つの操作の繰り返しだけで全部の操作が出てくる群。 C_n と書く。添字の n は、操作の個数、つまり位数である。

準同型写像 (じゅんどうけいしゃぞう) p.115

ある群から別の群へ、計算の仕組みを保ったまま要素を送る写像。準同型写像を略して、準同型と呼ばれることも多い。

$\phi: G \rightarrow H$...①で、 G で先に g, h を合成してから送っても、先に $\phi(g), \phi(h)$

を送ってから H で合成しても同じ結果になるとき、 ϕ (ファイ) を準同型写像という。式では $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \dots$ ②と書く。

(補足) ①は「ファイ、ジーからエイチへの写像」と読む。②は「ファイ・ジーエイチ・イコール・ファイ・ジー・かける・ファイ・エイチ」と読む。

準同型定理 p.133

「 G を $\ker \phi$ で割った商群は、 $\text{Im } \phi$ と同型である」ということ。式で示すと、

$$G / \ker \phi \cong \text{Im } \phi$$

読み方は、「ジー割るカー・ファイは、イメージ・ファイと同型である」。

群の準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ に対して、核 $\ker \phi$ で作った商群 $G / \ker \phi$ と、像 $\text{Im } \phi$ は同型である。つまり、 ϕ が同じものとして扱う元を核でまとめると、できた商群は、 ϕ で実際に到達する像と同じ計算の仕組みを持つということ (第9章)。

商群 (しょうぐん) p.102

群 G の正規部分群 N による剰余類を、一つ一つの元とみなして作った群。 G/N と書き、「ジー割るエヌ」と読む。演算は $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ と定める。 N が正規部分群なので、代表元をどれに選んでも、答えは同じ剰余類に決まる。

乗積表 (じょうせきひょう) p.22

二つの元を合成した結果を、行と列の交わるマスに並べた表。ケーリー表ともいう。本書では、行の元 g と列の元 h の交わるマスに $g \circ h$ を書く (列が先、行が後)。操作の順序や、部分群・剰余類の構造を調べるために使う。

剰余類（じょうよるい） p.62

部分群 H を、群 G のある要素 g でずらしてできる集合。左剰余類と右剰余類がある。剰余類は、群全体を重なりなく、余りなく分割する。

正規部分群（せいきぶぶんぐん） p.99

群 G の部分群 H のうち、すべての $g \in G$ について $gH = Hg$ を満たすもの。左剰余類と右剰余類が一致する。

生成元（せいせいげん） p.39

その繰り返しで群の全部の操作が作れるような操作のこと。群によっては、1 つでは足りず、2 つ以上の生成元が必要な群もある。

像（ぞう） p.121

写像によって、行き先に実際に現れる要素を全部集めたもの。 $\text{Im } \phi$ と書き、「イメージ・ファイ」と読む。たとえば $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ で、実際に 0 と 1 の両方に到達するなら、 $\text{Im } \phi = \{0, 1\} = C_2$ となる。「終域」と区別することが重要で、行き先として用意された集合全体が「終域」、像は実際に到達したもの。像と終域が一致するとは限らない。

代表元（だいひょうげん） p.65

剰余類の中の任意の 1 つの要素を指す言葉。剰余類 gH を作るときの g のこと。異なる剰余類を漏れなく表すには、代表元を各剰余類から 1 つずつ選ぶ。

単位元（たんいげん） p.26

「何もしない操作」のこと。群 G の中で、どの要素 a に合成しても a を変えない。「恒等操作」ともいう。

置換群（ちかんぐん） p.33

n 個のものを並べ替えるすべての方法の集まりを置換群といい、 S_n と書く^{**1}。
添字の n は、並べ替える対象の個数。位数は、 n 個を一行に並べる方法の数。 S_3 の位数は $3 \times 2 \times 1 = 6$ 、 S_4 の位数は $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ となる。

^{**1} 「 S_n は対称群」とするのが正確だが、本書では「置換群」と呼ぶことにする。

同型（どうけい） p.132

二つの群の元が一对一に対応し、その対応が演算も保つこと。群 G と H が同型であることを、 $G \cong H$ と書く。要素の名前や見かけが違っても、群として同じ構造を持つことを表す。

同値関係（どうちかんけい） p.45

次の三つの性質（三律（さんりつ））を満たす関係のこと。

（反射律）

x と x の間には、常に「ある関係」が成り立つ。言い換えると、自分自身にも、「ある関係」が成り立つ。

（対称律）

x と y の間に「ある関係」が成り立つなら、 y と x の間にも「ある関係」が成り立つ。

（推移律）

x と y の間に「ある関係」が成り立ち、さらに y と z の間にも「ある関係」が成り立つなら、 x と z の間にも「ある関係」が成り立つ。

同値類（どうちるい） p.49

類別により、できた組の一つ一つ。

二面体群（にめんたいぐん） p.32

正 n 角形を動かして元の位置に重ねる操作の集まりを二面体群といい、 D_n と書く。正三角形の群は D_3 、正六角形の群は D_6 である。添字の n は n 角形の n である。巡回群の n とは違うので注意すること。正 n 角形には回転が n 個、鏡映が n 個あるので、位数は $2n$ になる。

非可換群（ひかかんぐん）

可換群ではない群（例： n が 3 以上の二面体群 D_n 。 D_3 は位数 6）。

非正規部分群（ひせいきぶぶんぐん） p.99

正規部分群でない部分群。

左剰余類（ひだりじょうよるい） p.94

部分群 H のすべての要素 s に、左から群 G の要素 g を合成してできる集合。 gH と書く。 g と h が同じ左剰余類に入るための条件は、 $g^{-1}h \in H$ である。これは「 g インバース h は H に属する」と読む。 g の逆元と h の積は、 H の要素であるという意味である。

部分群（ぶぶんぐん） p.36

群の一部を取り出したものが、群になっているもの。

右剰余類 (みぎじょうよるい) p.94

部分群 H のすべての要素 s に、右から群 G の要素 g を合成してできる集合。
 Hg と書く。

無限群 (むげんぐん) p.72

要素数が無限の群。例：整数全体を要素とし、足し算を演算とする群。

有限群 (ゆうげんぐん) p.72

要素数が有限な群。

ラグランジュの定理 p.71

群 G^{**2} の位数は、部分群 H の位数で割り切れるということ。剰余類の個数 (指数) を n とすると、 $(G \text{ の位数}) = (H \text{ の位数}) \times n$ である。

****2** この群は、有限群 (要素数が有限な群) が前提である。無限群では「要素の個数を数えて割り算をする」というラグランジュの定理の考え方が、そのままでは使えない。

類別 (るいべつ) p.49

重なりなく、余りなく、組に分かれること。

$\in$

「 $\sim$ に属する」「 $\sim$ の要素である」。例： $g, h \in G$ 。読み方は「 g, h は G に属する」。群論では意味を意識して、「 g と h は G の元である」と読んでもいい。意味は「 g と h は、どちらも群 G の要素である」ということ。

$\notin$

「 $\sim$ に属さない」。

$\subseteq$

「部分集合である」。 $A \subseteq B$ は「 A のすべての要素が B にも属する」。 $\subset$ も同じ意味で使われることが多い（教科書によっては、 $\subset$ を「真部分集合」に限定して使う場合もある）。

あとがき

群論は、微積分や線形代数とは違い、数式が少ないので、学び始めるハードルは意外と低いと聞いたことをきっかけに、学習を始めました。使うのは、紙で切った三角形。ねじや音楽とも関連があるということでした。群論はいつか勉強してみたいと思っていたので、ブログで連載する形で始めたのです。

最初は、三角形を回したり、裏返したりして、紙にメモするくらいで進められました。しかし、第4章ぐらいになると、様子が変わってきます。「何のこと？」と思うような事項が増えたのです。数式は少ない。でも、何を言っているのかわからない。一山越えたら楽になるかと思ったら、さらに抽象の山がありました。「なぜこんなことを考えるのか」「このことは、次の何につながるのか」。ねじや音楽の話にたどり着くのは、いつのことか。軽い気持ちで始めたことに後悔しました。

他の教科書を開いても、集合記号や定義を使って説明が進んでいくので、この本を書くうえで参考にすることができませんでした。仕方がないので、それまでと同じように、具体的な操作で確かめながら進めるしかなかったのです。それが、この本が D_3 で話を押し進めている理由です。具体的な操作から出発して、自分の「なぜ？」を一つずつ確かめ、やっと準同型定理までたどり着いたのが本書です。

何を同じとみなせば、それらを一つにまとめても計算が成り立つのか。その条件について、具体例で見通しを立て、定義と証明で確かめていく。これがこの本の進め方でした。誰かの理解の助けになっていれば、幸いです。

この本を読まれている方の中には、「一般の5次以上の方程式には、なぜ四則演算と根号による解の公式がないのか」を知りたいと思っている方もいらっしゃる

と思います。そこにたどり着くには、正規部分群と商群を使って群の構造を調べる「可解群」へ進みます。さらに、四則演算ができる数の集まりである「体」と、方程式の解を加えて体を広げる「体の拡大」を学び、ガロア理論へとつながります。

ガロア理論では、係数を固定し、代数的な関係を保つ解の入れ替えを群として捉えます。そして、方程式が四則演算と根号で解けることと、この群が可解群であることを結び付けます。本書で学んだ正規部分群、商群、準同型は、この問いを理解するための基礎になります。

ここまで来たので、今度はその問いにもたどり着いてみたいと思っています。

中扉の答

C_4 です。

南部菱刺しをモチーフにした模様が12個、輪になって並んでいます。色は、時計回りに白・朱・からの順で4回くり返しています。模様の位置と色だけに注目すると、輪全体を 90° 回せば、同じ色の模様が同じ位置に重なります。一方、どの軸で折り返しても、色の順番が逆回りになって重なりません。回転だけがあって、鏡映がない。第3章の羽根車と同じ C_4 です。

わからなかった私のための群論入門——ねじ・音楽・群

発行日 2026.10.05

著者 B.T.

連絡先 info@giju-c.chu.jp
