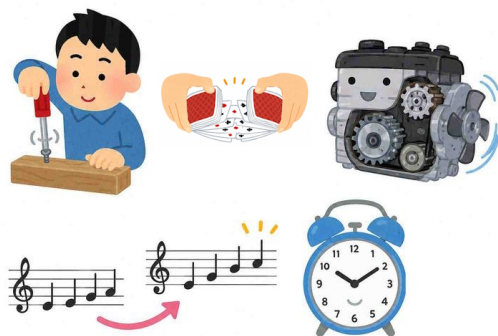


第1章 状態から操作へ

§1.1 群（ぐん）ってなに？

ねじを回す。カードのシャッフル。エンジンの回転を歯車がタイヤに伝える。
メロディーを移調する。アナログ式の目覚まし時計をセットする。



図表 1-1 身近な操作の例

これらは一見すると別々の現象ですが、実は、共通する規則があります。どれも「ものを動かす操作」であり、操作どうしは、続けて行ったり、元に戻したりできます。こうした操作をひとまとめにしたものを群（ぐん）といい、群の性質を調べる数学を群論（ぐんろん）といいます（※群の正確な定義は、第2章で行います）。

ある操作を続けて行くとどうなるか。元に戻せるか。順序を変えると結果は同じか。群論を用いると、ものを動かす操作の規則が記述・分析できるのです。

群の「操作の規則」という見方は、日常生活を始め、物理学、化学、機械工学、暗号、音楽理論など、多くの分野で現れます。

群論は、大学の数学の中でもとっつきにくいものの代表のように思われがちですが、実は、群論を学び始めるのに、微分積分も、高度な計算も要りません。必要なのは、用語の準備がほんの少しと、定義から一歩ずつ議論を積んでいく根気だけです。前提知識のハードルは、イメージよりずっと低いのです。

では何が難しいのでしょうか。

§1.2 回して裏返して、群を知る

群論の難しさは、前提知識ではなく、抽象度にあります。そこで、この本では、紙で作った図形を回したり、裏返したり、実際に動かすことから始めます。動かしながら、その中にある規則を確かめ、定義などはあとから学んでいきます。

実物といっても、最初は、紙で作った正三角形です。この正三角形を、回して、裏返すだけ。これだけなのですが、正三角形の回転と裏返しには、群論の考え方の芽が、ひとつお入っていて、群論の基本となる「操作」「合成」「元に戻す」「順番が大切」といった考え方が自然に見えてくるのです。

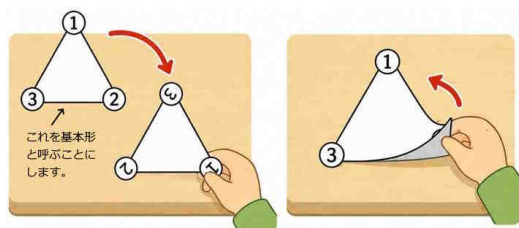
これが、次の正方形や正六角形にも、そのまま活かされます。さらには、歯車、ねじ、音楽...と広がっていきと思います。違うように見えていたことが、群でつながっていくのです。

この本では、ねじや歯車や音楽を、群論で設計・分析するなんてところまでは到達できません。しかし、群論を知ることで、身の回りのものたちが、今までと違って感じられるかも...。そんな内容にしたいと思っています。

では、始めましょう。

§1.3 正三角形を動かして集合を作る

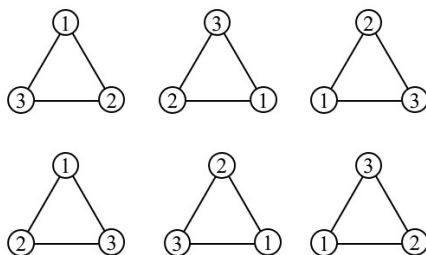
正三角形の三つの頂点に、上から時計回りに 1・2・3 と数字を振ります。数字は表だけでなく、裏面（同じ位置に同じ数字）に書いておいてください（裏返してもわかるように）。



図表 1-2 正三角形の回転と鏡映

この三角形を、机の上で回したり、裏返したりしてみましょう。回すと頂点の数字の位置が入れ替わります。裏返しても入れ替わりますね（図表 1-2）。

では、基本形とぴったり重なる置き方は、全部で何通りあるでしょうか。実際に動かして数えてみてください。数えると、6 つあります。回転で 3 つ（そのまま、 120° 回転、さらに 120° 回転）、基本形を裏返したもののたちが 3 つ（裏返したものの、裏返しを 120° 回転、さらに 120° 回転）、合わせて 6 つです。それ以上は、どう動かしても、この 6 つのどれかに戻ってきます（図表 1-3）。



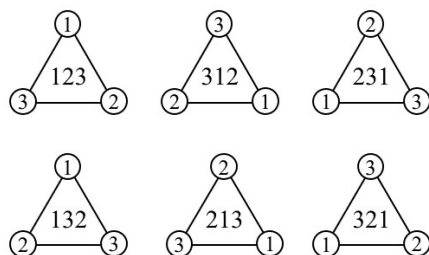
図表 1-3 6 つの状態

この6つを、数字の並びで書き表しましょう。三角形の一番上の数字から時計回りに並べると、3桁の数になります。6つの正三角形は、次の6個の数で表せるということです。これは、 $1 \cdot 2 \cdot 3$ をそれぞれ1回ずつ使ってできる、すべての3桁の数でもあります。

$$\{123, 312, 231, 132, 321, 213\}$$

この6つをひとまとめにしたものを集合といいます。これを T と名付けます。つまり、

$$T = \{123, 312, 231, 132, 321, 213\}$$



図表 1-4 6つの状態 (集合 T)

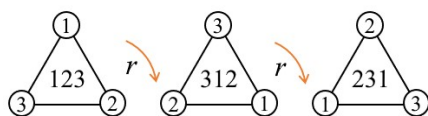
この集合 T の6つの要素を、もとの三角形の絵で一覧にしました (図表 1-4)。以降、この6つを「6つの状態」と呼ぶことにします。

図表 1-4 上段 (123・312・231) は、正三角形を 120° 時計回りに回転させて、3桁の数を作ったのでしたね。この操作を「回転」と呼ぶことにし、記号 r で表します (図表 1-5)。

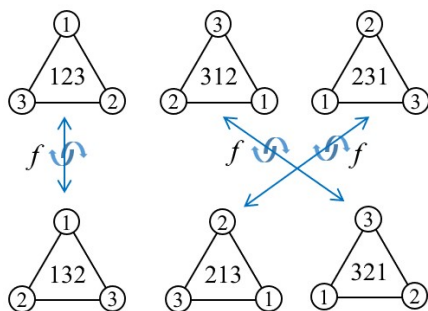
図表 1-4 下段を見てみましょう。123 と 132、312 と 321、231 と 213 というペアで比較すると、頂点を固定して左右を入れ替えたものになっています。この操作を「鏡映」と呼び、記号 f で表します (図表 1-6)。聞き慣れない言葉かもしれませんが、頂点を固定し、ひっくり返しているだけです。

回転と鏡映は、紙で正三角形を作って自分で動かしてみるのが、いちばんよくわかります。ぜひ、やってみてください。

動かす上で大事なのは、「三角形（数字の並び）」ではなく、「三角形をどう動かしたか、操作したか」です。動かし方は、大きく 2 種類ありました。そう、回転と鏡映です。この二つを組み合わせると、6 つの状態すべてに行き着けます。



図表 1-5 回転 r による状態の移り変わり



図表 1-6 鏡映 f による状態の移り変わり

§1.4 操作に注目！

操作がわかったところで、ここからは、操作のほうに記号をつけます。回転を r 、鏡映を f 、そのままにする操作を e と書きます。以降、操作は e, r, f のように書き、状態を指すときは $[123]$ のように角括弧で書きます。集合 T の中身を並べるときは、これまでどおり括弧なしで書きます。基準は $[123]$ です。ほかの 5 つの状態は、 $[123]$ に操作を加えれば作れます。

6つの状態と6つの操作は、一つずつ対応するのです。

§1.5 式の書き方

e に 120° 時計回りの回転を加えることは、次のように書きます。

$$r \circ e = r$$

$\circ$ は「操作を加える」という意味の記号で、「まる」と読みます。 e と r の並び順に注目してください。**操作は、左側に加えます。**回転させたものをさらに回転させることは、次のように書きます。

$$r \circ r = r^2$$

操作に操作を加えることは「合成」といいます。鏡映も同様です。 e に鏡映 f を加えることは、

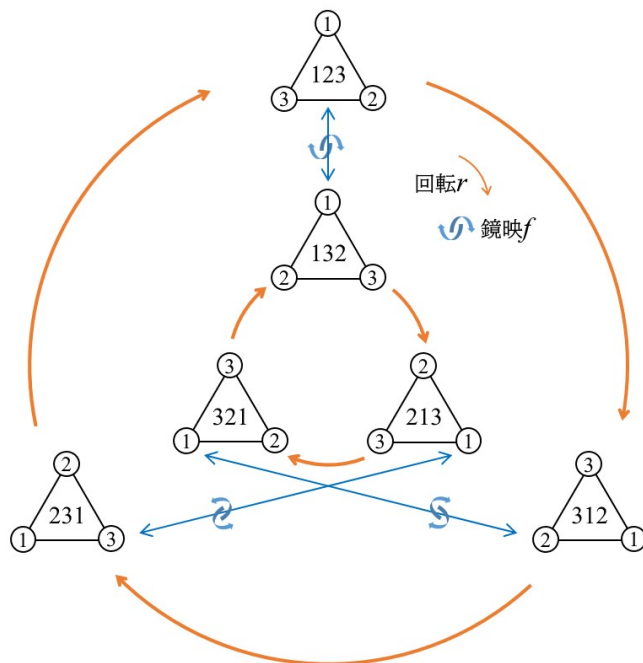
$$f \circ e = f$$

と書きます。鏡映したものを鏡映すると元に戻ります。

$$f \circ f = e$$

今後、 r^{-1} は反時計回りの回転を表し、「 $r \circ f$ 」を「 rf 」のように、「 $\circ$ 」を省略して表記することがあります。

この回転と鏡映の6つの操作を1つの図にまとめると、図表 1-7 になります。
この図はケーリーグラフといいます。



図表 1-7 内側は [132] を出発点に、回転の順に並べている。

この図から、下記の式が確認できます。

$$r \circ e = r \quad r \circ r \circ e = r^2 = r^{-1} \quad r \circ r \circ r \circ e = r^3 = e$$

$$f \circ e = f \quad r \circ f = rf \quad r \circ r \circ f = r^2 f$$

$$r^{-1} \circ f = r^2 f \quad f \circ rf = r^2 \quad f \circ r^2 f = r$$

$$r^{-1} \circ r = e \quad f \circ f = e \quad f \circ r = r^2 f$$

式で書くと、途端に面倒くさく見えますが、式を一つずつ、図表 1-7 のどこと対応するのを見ていくと、わかってくると思います。

例えば、「まず r 、続けて f 」は、 $[123] \rightarrow [312] \rightarrow [321]$ 。

「まず f 、続けて r を 2 回」も、 $[123] \rightarrow [132] \rightarrow [213] \rightarrow [321]$ 。

同じ $[321]$ に着きました。どちらも同じ動かし方をしたことになります。だから $f \circ r = r^2 f$ です。

第 1 章のまとめ

- 状態ではなく「どう動かしたか」という操作に注目する。回転を r 、鏡映を f 、何もしない操作を e とする。
- 6 つの状態には、 $e, r, r^2, f, rf, r^2 f$ の 6 つの操作が一つずつ対応する。
- 操作を続けて行うことを合成という。あとから行う操作を左に書く。
- $r^3 = e$ 、 $f \circ f = e$ 。操作には、元に戻す操作がある。
- 回転と鏡映を組み合わせるときは順序が大切。

問題

問 1-1

「まず r を 2 回 (r^2)、続けて f (鏡映)」を合成した結果は、6 つの操作のどれになるでしょうか。

解答

1-1 $f \circ r^2 = rf$

書く順番を間違えないことが大切です。操作は左に加えます。「まず r^2 、続けて f 」ですから、 r^2 の左に $\circ$ を書き、その左に f を書いて $f \circ r^2$ です。図表 1-7 でたどってみましょう。 $[123] \rightarrow [312] \rightarrow [231]$ が r^2 で、そこに f を加えると $[213]$ です。この $[213]$ は、 $[123]$ に f 、続けて r を加えた状態、つまり rf となります。