

第 2 章 表から群へ

第 1 章で、操作には 6 つあること、この 6 つを合成できる（操作を続けて行うこと）を知りました。合成で大事なものは、書く順番でした。あとから行う操作は $\circ$ の左側に書く、です。

第 2 章は、この 6 つ同士を合成したら、どうなるかを表にまとめることから始めます。

§2.1 乗積表を作る

6 つ同士を合成する表を乗積表といいます。操作は、列が先、行が後です。6×6 ですから、36 マスを埋めることになります。

		列（先）					
行（後から）	$\circ$	e	r	r^2	f	rf	r^2f
	e						
	r						
	r^2						
	f						
	rf						
	r^2f						

図表 2-1

といっても、基本は 3 つのマスの、あとは組み合わせるだけです。3 つのマスの、次の (1)(2)(3) です。

(1) r 同士を合成する ($r \circ r$)

r を 2 回 ($r \circ r$) は r^2 。 r を 3 回 ($r \circ r^2$) も計算しておきましょう。これは、元に戻るのと同じだから、 $r^3 = e$ 。

(2) f 同士を合成する ($f \circ f$)

f を 2 回 ($f \circ f$) は元に戻るのと同じだから、 $f \circ f = e$ 。

(3) 先に r 、続けて f を合成する ($f \circ r$)

図表 1-7 から、 $f \circ r = r^2 f$

今、わかったことを、マスに書き込んでみましょう。

		列 (先)					
行 (後から)	$\circ$	e	r	r^2	f	rf	$r^2 f$
	e						
	r		r^2	e			
	r^2						
	f		$r^2 f$		e		
	rf						
	$r^2 f$						

図表 2-2

この 3 つと、何もしない操作 e を組み合わせてマスを埋めていきます。

§2.2 「動かして学ぶ」から、「動かさなくても分かる」へ

他のマスも埋めていきましょう。

例として、「まず r^2 、続けて f 」、つまり $f \circ r^2$ のマスをやってみます。

- (i) $f \circ r^2 = f \circ r \circ r$ と分解します。
- (ii) ここで、「操作の合成では、順序を変えなければ、括弧の付け方を変えてかまわない」という法則を使います。これを結合則といいます（詳しくは、§2.4）。
- $f \circ r \circ r = (f \circ r) \circ r \dots \textcircled{1}$ とします。§2.1(3) の $f \circ r = r^2 f$ と、結合則を使って、置き換えていきます。
- $\textcircled{1} = (r^2 f) \circ r = r^2 (f \circ r) = r^2 \circ (r^2 f) = r^4 f$
- (iii) r^4 は r を 4 回。§2.1(1) から $r^3 = e$ なので、 $r^4 = r^3 \circ r = e \circ r = r$ 。よって、式 (ii) は、 $r^4 f = r f$ となります。

図表 1-7 で確かめてください（この r が 3 つ揃うと消える、 f が 2 つ揃うと消える感じ、なんかテトリスっぽいですね）。

このように、式を組み合わせ、表を完成させていきます。

行（後から）

	列（先）					
○	e	r	r^2	f	rf	$r^2 f$
e	e	r	r^2	f	rf	$r^2 f$
r	r	r^2	e	rf	$r^2 f$	f
r^2	r^2	e	r	$r^2 f$	f	rf
f	f	$r^2 f$	rf	e	r^2	r
rf	rf	f	$r^2 f$	r	e	r^2
$r^2 f$	$r^2 f$	rf	f	r^2	r	e

図表 2-3 乗積表

これが完成した乗積表です。ケーリー表ともいいます。

自分で埋めた表と見比べてください。違っていたら、どこで食い違ったかを追うのが一番の勉強になります。ここが「動かして学ぶから、動かさなくても分かる」への大事なポイントになります。

§2.3 順序を変えると結果が変わる

乗積表を観察すると、こんなことが見えてきます。

○	e	r	r^2	f	rf	r^2f
e	e	r	r^2	f	rf	r^2f
r	r	r^2	e	rf	r^2f	f
r^2	r^2	e	r^2f	f	rf	r
f	f	r^2f	rf	e	r^2	r
rf	rf	f	r^2f	r	e	r^2
r^2f	r^2f	rf	f	r^2	r	e

九九	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

図表 2-4 左：乗積表（重ならない） 右：九九（重なる）

(1) どのマスも、6つの中にある

どのマスも e 、 r 、 r^2 、 f 、 rf 、 r^2f 以外の記号は、ありません。どの操作とどの操作を組み合わせても、6つの外には出ないのです。

(2) どの行にも、どの列にも、6つが1回ずつ

順番は違っても、 e 、 r 、 r^2 、 f 、 rf 、 r^2f が、必ず全部1回ずつ現れます。列も同じです。数独やパズルの表と同じ形をしています。

ここで重要なのが、「どの行にも、必ず e がある」ということです。それは、合成した操作に、何かを合成すれば、基本形に戻せる、ということです。

rf の行を見てください。 e があるのは rf の列です。つまり $rf \circ rf = e$ 。 rf を 2 回やれば元に戻る、ということです。

(3) 折り返しても、重ならない

表の左上から右下へ対角線を引いて、折り返してみます (図表 2-4)。九九の表なら、これでぴったり重なります。 3×5 も 5×3 も 15 だからです。乗積表は重なりません。

かけ算は順序を変えても答えは同じですが、この群では結果が変わる。「順序が大事」という意味が乗積表からも見えます。とは言っても、全く重ならないわけではなく、左上の e, r, r^2 だけの範囲は折り返すと重なります。回転どうしなら順序を変えても同じです。鏡映が入ると、順序が大事になるというわけです。

§2.4 群であるということ

第 1 章で、群とは「操作をひとまとめにしたもの」と書きました。それが、今行った、6 つの操作と、操作を続けて行う (合成する) です。この仕組みを持つ集まりを群といいます。

群であるための条件は次の 4 つです。

(1) 組み合わせた結果が閉じている

表の中身が 6 つだけ、ということです。

(2) 何もしない操作がある

e のことです。この操作を単位元といいます。 e は、どの操作に合成しても相手を変えません。

(3) どの操作にも、打ち消す操作がある

どの操作にも、それと合成すると e になる操作があるということです。この打ち消す操作を、もとの操作の逆元といいます。この乗積表では、各行・各列に e が1つずつ現れることから確認できます。

(4) 結合則が成り立つ

操作を3つ続けるとき、順序を変えなければ、どこから先にまとめても結果は同じです $((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z))$ 。

操作を写像として表し、その合成を演算とすると、結合則は必ず成り立ちます。そのため、操作の集まりが群になるかを調べるときは、残りの3条件を確かめれば足ります。結合則は「まとめ方を変える」だけで、順序は変えていません。「順序を変えてよい」というのは交換則で、それとは別のものです。

正三角形の操作は、条件(1)~(3)をすべて満たしています。(4)の結合則は操作の合成で必ず成り立つので、群です。

群には名前があり、この正三角形を動かして作った群は D_3 といいます。要素の数を位数(いすう)といい、「 D_3 の位数は6である」というような言い方をします(群の名前については、次章で整理します)。

ここで、大事ななのは、群になるのは、操作だということです。できあがった状態のほうではありません。いま作った群 D_3 は、6つの**操作**の集まりで、第1章で作った集合 T は、6つの**状態**の集まりでした。どちらも6つで同じように見えますが、操作は合成できますが、状態は合成できません。この違いが重要です。

§2.5 あれも群、これも群

群が定義できたので、第1章「群ってなに？」で挙げた例がどんな群なのか見ていきましょう。

時計

目覚まし時計の針を「3時間進める」「5時間戻す」。この操作の集まりを考えます。組み合わせても12時間の世界から出ません（条件(1)）。何もしない操作があります（条件(2)）。進めた分は、戻せます（条件(3)）。3条件を満たしています。群です。しかもこの群は、順序を変えても結果が同じです。3時間進めてから5時間進めるのも、5時間進めてから3時間進めるのも、8時間進める。正三角形とは違って、ここでは順序が問題になりません。もう一つ、正三角形と違うところがあります。正三角形は、回転と鏡映という2種類の操作がありましたが、時計の操作の群は、すべて「1時間進める」の繰り返しでできています。3時間進めるのは、1時間進めるを3回。12回で元に戻ります。たった一つの操作を繰り返すだけで、12の操作が全部出てくるのです。

正六角形

正三角形と同じ方法で数えられます。回転が6 (0° 、 60° 、 120° 、 180° 、 240° 、 300°)。鏡映が6。合わせて12です。正三角形は、回転3と鏡映3で6でした。正六角形は12。 n 角形なら、回転が n 個、鏡映が n 個で、合わせて $2n$ になります。角の数が増えれば、群も大きくなる。図形の対称性の高さが、そのまま群の大きさになっています。

歯車

歯数60の歯車を考えます。1歯分 (6°) 回すと、元の歯車と重なります。2歯、3歯でも同じです。60歯回すと一周して元通り。時計と同じ作りです。「1歯分」の繰り返しで、60個の操作が出てきます。数が12から60に変わるだけ。

歯車の歯数は「回転の速さや伝える力を決める」要素ですが、群で見ると、「歯車を持つ対称性の大きさ」なのです。

並べ替え

第1章で、6つの状態を「 $1 \cdot 2 \cdot 3$ をそれぞれ1回ずつ使ってできる、すべての3桁の数」と説明しました。これは、3つのものを並べ替えるすべての方法、そのものです。並べ替えも群になります。組み合わせても3桁の数のまま。何もしない並べ替えがあります。並べ替えたものは元に戻せます。あみだくじも群として考えることができます。この乗積表を作ると、正三角形の群と同じ形になります。正三角形を動かす話と、数字を並べ替えること、見かけは違っても群として見れば同じもの。これが、「違うように見えていたことが、群でつながっていく」のです。

第2章のまとめ

- 群の条件は4つある。操作の合成を演算とする場合、結合則は必ず成り立つので、残る3条件「閉じている」「何もしない操作がある」「どの操作にも打ち消す操作がある」を確かめればよい。
- 群に含まれる要素の個数を、その群の「位数」という。
- 正三角形の6つの操作の群を D_3 という。 D_3 の要素は6個なので、 D_3 の位数は6。6つの状態の集合 T とは区別する。
- D_3 では操作の順序を変えると結果が変わることがある。つまり交換則は一般には成り立たない。

問題

問 2-1

図表 2-3 を使って、 $f \circ r^2$ を教えてください（どちらが先で、どちらが後でしたか）。

問 2-2

rf を打ち消す操作は何ですか。 rf を施したあと、何を施せば基本形 e に戻りますか。

問 2-3

正正方形を動かして、元の位置にぴったり重なる方法は、全部でいくつありますか。回転と鏡映に分けて数えてください。

Column 「ねじ・音楽・群」という副題

この本の副題が「ねじ・音楽・群」なのは、ねじも音楽も、群として見ることができるからです。ねじは、上から見た姿に対称性があります。二条ねじなら半回転で重なる。歯車と同じ作りです。音楽の移調は、時計の針を進めるのと同じ作りです。半音ずつ上げていくと、12 回で元の音名に戻ります。音の上下をひっくり返す反行は、2 回で元に戻る。正三角形の鏡映と同じです。そして、反行してから移調するのと、移調してから反行するのでは、結果が違うことがあります。順序が大事、というあの話が、音でも起こるのです。第 11 章で、あらためて取り上げます。

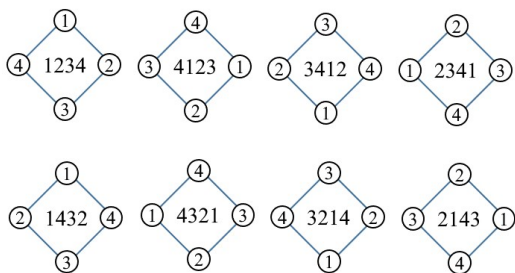
解答

2-1 rf

2-2 rf

2-3 回転4、鏡映4の計8。

正三角形と同様に、正方形の頂点に1234の数字を振ったものを考えます。



図表 2-5

この正方形を回転と鏡映させてできる数字のならびは、

$\{1234, 2341, 3412, 4123, 1432, 2143, 3214, 4321\}$ の8通りです。