

第3章 群の名は

第3章は、§2.4 で書いた「群には名前があり」という話から始めます。そして、乗積表（図表 2-3）を、再び観察し、表の中に隠れている小さな群を見つめます。

§3.1 群の名称と記号

巡回群

時計は「1 時間進める」という操作ひとつを繰り返すだけで、12 個の操作が全部出てきました。12 回繰り返すと元に戻ります。歯車は「1 歯分」の繰り返して、操作は全部で 60 個でした。このように、一つの操作の繰り返しだけで全部の操作が出てくる群を巡回群といい、 C_n と書きます。添字の n は、操作の個数、つまり位数です。なので、時計は C_{12} 、歯数 60 の歯車は C_{60} となります。

§2.5 で、歯車は「時計と同じ作りです」と書いた話は、群の名称を使って書き換えると、「時計と歯車は巡回群という同じ作りの群だ」ということだったので

二面体群

正 n 角形を動かして元の位置に重ねる操作の集まりを二面体群といい、 D_n と書きます。正三角形の群は D_3 、正六角形の群は D_6 です。添字の n は n 角形の n です（巡回群の n とは違うので注意してください）。第2章で数えたとおり、正 n 角形には回転が n 個、鏡映が n 個ありますから、位数は $2n$ になります。

- D_3 ... 正三角形。位数は 6
- D_4 ... 正方形。位数は 8（問 2-3 で数えたとおりです）
- D_6 ... 正六角形。位数は 12

置換群

n 個のものを並べ替えるすべての方法の集まりを置換群**1 といい、 S_n と書きます。第 1 章で「 $1 \cdot 2 \cdot 3$ をそれぞれ 1 回ずつ使ってできる、すべての 3 桁の数」と言っていたものは、 S_3 となります。添字の n は、並べ替える対象の個数です。位数はいくつかというと、 n 個を一行に並べる方法の数ですから、 S_3 の位数は $3 \times 2 \times 1 = 6$ 、 S_4 の位数は $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ となります。

**1 S_n は「対称群」とするのが正確ですが、二面体群 D_n を「正 n 角形の対称操作の群」としている教科書もあり、どちらにも「対称」が入って紛らわしいので、この本では、 S_n を「置換群」ということにします。

群の名称と添字のまとめ

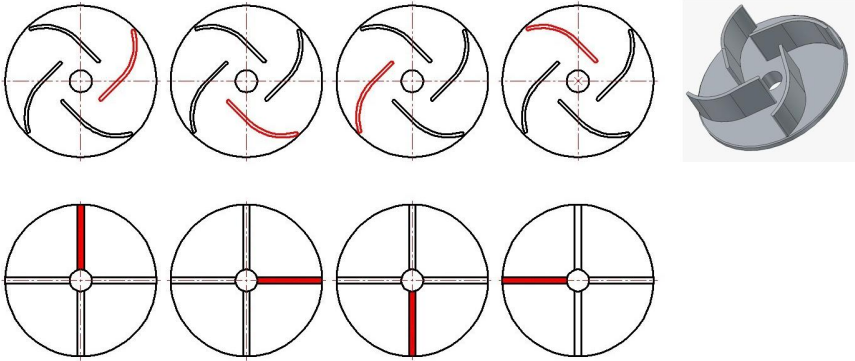
添字 n は、群によって意味が変わるので表にまとめました。

群の名称	記号	添字 n の意味	位数
巡回群	C_n	位数そのもの	n
二面体群	D_n	n 角形の n	$2n$
置換群	S_n	並べ替える対象の個数	$n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$

図表 3-1

§3.2 回転だけの群、鏡映もある群

C_4 と D_4 の違いを、図で見てください。

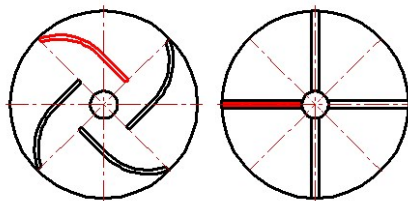


図表 3-2 上段：ポンプの羽根車 下段：十字のスポーク

図表 3-2 の上段はポンプの羽根車です。羽根が 4 枚、同じ向きに反っています。下段は十字のスポーク。どちらも 90° 回すと元の形に重なります。赤い印で、その様子を追ってください。

回転については、上下に差がありません。どちらも 90° 、 180° 、 270° 、そして元に戻る、の 4 つです。

では、折り返してみましょう。縦・横・斜め 45° の 4 本の軸を引きます。



図表 3-3 左：羽根車 右：十字スポーク

十字スポーク（右）は、4本のどの軸で折り返しても重なります。回転4つに鏡映4つが加わって、位数は8。 D_4 です。

羽根車（左）は、羽根の反りが逆だからどの軸で折り返しても重なりません。折り返すと、羽根の反りが逆向きになってしまいます。鏡映が一つもないのです。回転4つだけで、位数は4。 C_4 です。

羽根車の羽根は、流体を外へ送り出すため反っています。羽根は軸の釣り合いのために、等角度（等ピッチ）で配置されます。反りが鏡映を消し、等角度配置が「90°回転で重なる」を残す。残った4つの回転が C_4 です。機械の部品には、こういう形が数多くあります。

§3.3 群の中に群

乗積表（図表 2-3）を思い出しましょう。

列（先）

◦	e	r	r^2	f	rf	r^2f
e	e	r	r^2	f	rf	r^2f
r	r	r^2	e	rf	r^2f	f
r^2	r^2	e	r	r^2f	f	rf
f	f	r^2f	rf	e	r^2	r
rf	rf	f	r^2f	r	e	r^2
r^2f	r^2f	rf	f	r^2	r	e

行（後から）

図表 2-3 乗積表

§2.3 で、こう書きました。「全く重ならないわけではなく、左上の e 、 r 、 r^2 だけの範囲は折り返すと重なります」。

この左上の部分をもう一度取り出してみましょう。

$\circ$	e	r	r^2
e	e	r	r^2
r	r	r^2	e
r^2	r^2	e	r

図表 3-4

9マスの中に、 e 、 r 、 r^2 の3つしか出てきません。 f も rf も r^2f も、一つもありません。結合則は操作の合成で成り立つので、残る3条件に照らし合わせてみましょう。

(1) 組み合わせた結果が閉じている。

9マスの中身が e 、 r 、 r^2 の3つだけ。

(2) 何もしない操作がある

e が入っている。

(3) どの操作にも、打ち消す操作がある

どの行にも e が1つある。

$\{e, r, r^2\}$ は3条件を全部満たしています。ということは、これは、群なのです。

このように、群の一部を取り出したものが、群になっているとき、これを部分群といいます。 $\{e, r, r^2\}$ は D_3 の部分群なのです。

回転だけを集めたものですから、これは「120°回転を繰り返すだけで全部出てくる」群、つまり C_3 です。 D_3 の中に C_3 が入っている、ということになります。

3.3.1 群の中に、まだ群

実はもっと群がひそんでいます。 $\{e, f\}$ に注目してください。

$\circ$	e	f
e	e	f
f	f	e

図表 3-5

e と f しか出てきません。 e があります。どの行にも e があります。3 条件を満たしています。 $\{e, f\}$ も部分群です。位数は 2 です。

え、もっとあるって？ あなた、さすがですね！

$\circ$	e	rf
e	e	rf
rf	rf	e

$\circ$	e	r^2f
e	e	r^2f
r^2f	r^2f	e

図表 3-6

そう、 $\{e, rf\}$ と $\{e, r^2f\}$ も部分群です。 $rf \circ rf = e$ 、 $r^2f \circ r^2f = e$ ですから、どちらも同じ形の 4 マスになります（問 2-2 で rf を打ち消す操作を探してもらったのが、ここで効いてきます）。

この 3 つ $\{e, f\}$ 、 $\{e, rf\}$ 、 $\{e, r^2f\}$ は、どれも同じ形をしています。位数 2 で、2 回繰り返すと e に戻る。巡回群 C_2 です。

まだ、あと 2 つあるんですよ。見落としがちな部分群が。それは...

- $\{e\}$... e ひとつだけ。 $e \circ e = e$ ですから、3 条件を満たします。位数 1 の部分群です。

- $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$... 全部です。 D_3 自身も、 D_3 の部分群です。

部分群	$\{e\}$	$\{e, f\}$	$\{e, rf\}$	$\{e, r^2f\}$	$\{e, r, r^2\}$	D_3 全体
位数	1	2	2	2	3	6

図表 3-7

まとめると、 D_3 の部分群は全部で 6 つあります。

「田という字の中に四角は何個ある？」というクイズがありますが、部分群はそれを思い出させます。

3.3.2 部分群にならない例

念のため、うまくいかない例も見ておきます。 $\{e, r\}$ はどうでしょうか。

$r \circ r = r^2$ です。 r^2 は $\{e, r\}$ の外です。条件 (1) に反します。 $\{e, r\}$ は部分群ではありません。

$\{e, r, f\}$ はどうか。 $f \circ r = r^2f$ 。これも外です。部分群ではありません。

適当に切り取っても部分群にはならない、ということです。ここが大事なところで、部分群になれる集まりは、かなり限られています。上の表を見ると、位数は 1、2、3、6 の 4 種類しかありません。4 や 5 の部分群は、 D_3 には一つもないのです。

なぜ 4 や 5 がないのか。これには理由があります。ただし、それを説明するには剰余類（第 5 章）という道具が要ります。

§3.4 生成元

§2.5「時計」の所で、こう書きました。「たった一つの操作を繰り返すだけで、12 の操作が全部出てくる」。

この「たった一つの操作」には名前があります。生成元（せいせいげん）とい
います。その繰り返しで群の全部の操作が作れるような操作のことです。時計の
 C_{12} なら「1 時間進める」が生成元です。歯車の C_{60} なら「1 歯分回す」が生成
元です。

群によっては、1 つでは足りず、2 つ以上を組み合わせることで全部を作ることあ
ります。その場合は、その組を生成元の組といいます**2。

巡回群というのは、要するに生成元が 1 つで足りる群のことです。

**2 2 つ以上のときは、繰り返しだけでなく、合成も使って作ります。

3.4.1 正三角形の群は巡回群？

正三角形の群 D_3 はどうでしょうか。 r を繰り返してみます。

$$r \rightarrow r^2 \rightarrow r^3 = e$$

3 回で終了です。 f が出てきません。回転をいくら繰り返しても、裏返しには
ならない（当たり前！）。

では f ならどうか。 f 、 $f \circ f = e$ 。2 回で終了です。 rf でも試してみます。
 $rf \circ rf = e$ でしたから、これも 2 回で終わりです。残りの 3 つも同じです。 r^2
は繰り返すと r^2 、 r 、 e 。回転の 3 つだけで、やはり f は出てきません。 r^2f
は 2 回で e 。 e は、何回繰り返しても e のままです。

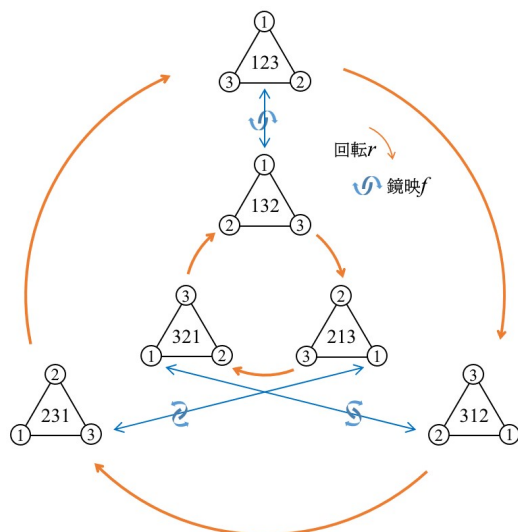
つまり、 D_3 の 6 つの操作のどれを選んでも、それ一つの繰り返しでは全部は
出てきません。 D_3 は巡回群ではないということです。

では、2 つならどうか。 r と f の 2 つを使えば、

$$e, r, r^2, f, r \circ f = rf, r^2 \circ f = r^2f$$

6 つ全部が出てきます。図表 1-7 が、まさにこれを描いた図です。オレンジの
矢印（ r ）と青の矢印（ f ）だけで、6 つの状態を全部たどれます。

このことを、 D_3 は r と f で生成されるといいます。 r と f が D_3 の生成元です。



図表 1-7

3.4.2 生成元の組は一通りではない

生成元の選び方は、一通りとは限りません。

r と rf の 2 つでも試してみます。図表 2-3 を使います。

r 、 r^2 、 $r^3 = e$ 、 rf 。

rf に r を合成すると、図表 2-3 の r の行・ rf の列で、 $r \circ rf = r^2f$ 。

さらに r を合成すると、 r の行・ r^2f の列で、 $r \circ r^2f = f$ 。

これで 6 つ揃いました。 r と rf でも D_3 は生成できます。

生成元というのは「その群にただ一つ決まっているもの」ではなく、「これだけあれば全部作れる」という組み合わせのことです。少ない部品で全体を組み立

てる、その部品セットだと思ってください。

では、今一度、図表 2-3 を生成元に注目して見直してみてください。

第 3 章のまとめ

- 巡回群 C_n (位数 n)、二面体群 D_n (位数 $2n$)、置換群 S_n (位数は n から 1 までの積)。添字の意味は 3 種類とも違う。
- 群の一部を取り出して、それだけで群になっているものを部分群という。
- D_3 の部分群は 6 つ。位数は 1、2、3、6。
- その繰り返しで全部が作れる操作 (の組) を生成元という。生成元 1 つで足りる群が巡回群。
- D_3 は 1 つの操作だけでは作れない。だから巡回群ではなく、生成元が 2 つ要る。

問題

第 3 章はたくさんの専門用語が出てきました。問題で確認しましょう。

問 3-1

D_4 (正方形の群) の位数はいくつでしょうか。 C_4 の位数と比べてください。

問 3-2

図表 2-3 を使って、 $\{e, r^2\}$ が部分群かどうか判定してください。

問 3-3

時計の群 C_{12} の中に、「3 時間進める」の繰り返しでできる部分群があります。何個の操作からなるのでしょうか。

解答

3-1 D_4 の位数は 8、 C_4 の位数は 4。

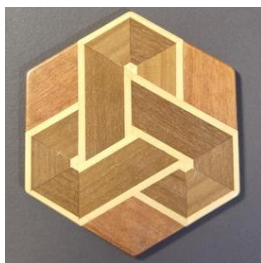
3-2 部分群ではない。

$r^2 \circ r^2 = r$ で、 r は $\{e, r^2\}$ の外に出ます。

3-3 4 個

0 時間、3 時間、6 時間、9 時間

Column



図表 3-8

これは、組木細工のコースターです。群の分類でいうと、何になると思いますか？ 内部模様を含めると C_3 と言えるのではないのでしょうか。コースターの美しさの秘密に、群論が言葉を与えてくれたような気がしています。
