

第4章 同値類

第3章で、 D_3 に要素が4個や5個の部分群が一つもないことを説明するには、剰余類という道具が要ると書きました。第4章は、その剰余類のさらに土台になる話です。その話は、「同じ」とは何か、というところから始まります。

まず、図表4-1のりんごを見てください。左は写真、中央は元の写真を5段階の白黒階調に変換したもの、右はデッサンです。



図表4-1 りんごの写真、5段階の白黒階調、デッサン

りんごの表面には、さまざまな赤があります。光が強く当たるところもあれば、影になっているところもあります。細かな模様や色の変化もあります。

画家がデッサンするとき、見える情報（形、色、光、影、など）すべてを描き写すわけではありません。細かな色の違いをいったん置いて、「明るい」「中間」「暗い」という大まかな明暗に分けて見るがあります。光がどこから当たっているのか、りんごの面がどちらを向いているのかを見ながら、「ここは明るい」「ここから暗くなる」と整理していきます。中央の図は、元の写真を5段階の白黒階調に変換したのですが、このような見方をしてみるということです。明暗を、なんとなく分けているのではないのです。

できあがったデッサンは、赤い色はないのに、「りんご」ですね。それは、りんごの、丸み、光の反射、影はしっかり描かれているからです。

つまり画家は、色や光の情報をある基準をもって、「ここここは同じ明るさ」というような省略を行っているのです。細かな違いを省略して、必要な特徴を残しているから、鉛筆の線の集まりが、「りんご」に見えるのです。

数学でも、これと似たことをします。「同じ」と呼べるものは何か、どこまでの違いなら、「同じ」として扱えるのか。

「同じ」という言葉を、私たちは当たり前のように使っています。そのたびに「何を基準にして同じと言っているのか」と考え直すことは、ほとんどありません。

数学では、その基準をはっきりさせます。基準を間違えると、話が成り立たなくなります。

では、群論における「同じ」とは何か、見ていきましょう。

§4.1 違うのに同じ？

「2 と 14 は同じですか？」と聞かれたらなんと答えますか？ 数としては違います。しかし、時計の 2 時と 14 時だとどうでしょう。時計の上では、針は同じところを指します。



図表 4-2 2 時を示す時計

14 時 25 分のことを、2 時 25 分と言い換えることも何気なくやっています。

なぜ、あるときは、「2 と 14 は違う」となり、あるときは「2 と 14 は同じ」と言えるのでしょうか。

それは、時間を考えるとき、12 の倍数とどれだけ違うかで組み分けしているからです。数式で書くと、ある数 x, y を引き算したとき、結果が 12 の倍数になるということです。 $x = 2, y = 14$ としましょう。 $x - y = 2 - 14 = -12$ (12 の -1 倍)。よって、2 と 14 は、時計の見方というルールの下で「同じ」です。0 時から 23 時までのすべてについて、私たちはこれをほぼ意識することなく計算しています。

注意したいのは、2 と 14 が等しくなったわけではないことです。等しくないまま、「差が 12 の倍数」というルールの下で「同じ」と呼んでいるのです。そして、「同じ」と呼べるものをまとめれば、組ができます。ルールを決めると、組み分けできるのです。

§4.2 組み分けするには

では、どのようにルールを決めたら組み分けできるのでしょうか。組は、仲間はずれや例外はあってはなりません。そのように作るためには、次の三つのことが成り立っている必要があります。

次の三つの性質を満たす関係を、**同値関係**といいます。

(1) 反射律

x と x の間には、常に「ある関係」が成り立つ。言い換えると、自分自身にも、「ある関係」が成り立つ。

(2) 対称律

x と y の間に「ある関係」が成り立つなら、 y と x の間にも「ある関係」が

成り立つ。

(3) 推移律

x と y の間に「ある関係」が成り立ち、さらに y と z の間にも「ある関係」が成り立つなら、 x と z の間にも「ある関係」が成り立つ。

この3つをまとめて三律と呼ぶことにします。ここで、 x, y, z は、関係を調べる対象を表します。今回の時計の例では、時刻を表す整数です。

これらは一見すると当たり前の性質に見えます。しかし、あるルールの下で対象が組み分けされるためには、この三つ（同値関係）を検証する必要があります。

§4.3 時計の同値関係

時計における「同じ時刻」を、次のように決めます。

「二つの時刻 x, y の差 $x - y$ が12の倍数であるとき、かつ、そのときに限り、 x と y は同じ時刻である（12時間制で）」

式では $x - y = 12n$ (n は整数) と表します。

では、同値関係を検証していきます。

(1) 反射律

どの時刻 x についても、 $x - x = 12 \times 0$ 。12の倍数になっているので、 x と x は同じ時刻です。よって、反射律は成立します。

(2) 対称律

x と y が「同じ時刻」であるとしします。このとき、 $x - y = 12n$ と表せます。 x と y を入れ替えると、 $y - x = -(x - y) = -12n$ 。12の倍数になっているので、 y と x は「同じ時刻」です。つまり、対称律は成立します。

(3) 推移律

x と y が同じ時刻であり、さらに y と z も同じ時刻であるとします。このとき、ある整数 n, m を使って、 $x - y = 12n$ 、 $y - z = 12m$ と表せます。二つの式を足すと、 $(x - y) + (y - z) = x - z = 12n + 12m = 12(n + m)$ 。 $n + m$ も整数なので、 $x - z$ は 12 の倍数です。よって推移律は成立します。

よって、三つの性質がすべて成立するので、「差が 12 の倍数である」という関係は同値関係です。この関係を使って、実際に整数全体を組み分けしてみるのが、§4.5 です。

§4.4 同値関係が成り立たないとは

「同値関係」が成り立たない場合を検証すると、同値関係がより理解できます。

ある学校の生徒たちを「年齢の差が 1 歳以内なら同じ組」とするルールを考えます。

ルールの定義：「生徒 a と生徒 b の年齢の差が 1 歳以内である」

さて、このルールは、生徒たちを漏れなく、重なりなく、組み分けできるルールでしょうか。検証していきましょう。

反射律：自分自身との年の差は 0 歳なので、年の差は 1 歳以内といえる。→成立

対称律： a 君は b 君と 1 歳以内である。ならば、 b 君は a 君と 1 歳以内である。→成立

推移律： $a = 15$ 歳、 $b = 16$ 歳、 $c = 17$ 歳とすると、 a 君と b 君の差は 1 歳以内、 b 君と c 君の差は 1 歳以内、しかし、 a 君と c 君の差は 1 歳以内ではな

い。→不成立。

よって、このルールは同値関係ではなく、年齢差が1歳以内という条件だけでは、「ある学校の生徒たち」を重ねない組に分けることはできません。

同値関係の3つの律（反射律・対称律・推移律）が成り立たない代表的なケースを、「 a と b が○○の場合（関係）」という形で整理すると、

1. a と b が「順序・大きさ」の関係の場合（比較）

例 $a < b \rightarrow$ 反射律、対称律が成立しない。

2. a と b が「近似・誤差の範囲内」の関係の場合

例 誤差が1以内 $\rightarrow$ 推移律が成立しない。

3. a と b が「共通点・交わりがある」関係の場合

例 直線 a と直線 b が交わり、直線 b と直線 c が交わっても、直線 a と直線 c が交わるとは限らない $\rightarrow$ 推移律が成立しない。

などがあります。

3つの律がすべて綺麗に成り立つ「同値関係」というのは、実はかなり特殊で強力な条件です。3つが揃って初めて、要素を重ねなくなり、余りなく組み分けできます。なぜ3つが揃うとそう言えるのかは、第5章で確かめます。

§4.5 同値関係があると、組に分けられる

時計に戻ります。整数全体を、「差が12の倍数なら同じ」で分けてみます。

0の組	...	-24	-12	0	12	24	...
1の組	...	-23	-11	1	13	25	...
2の組	...	-22	-10	2	14	26	...
3の組	...	-21	-9	3	15	27	...
4の組	...	-20	-8	4	16	28	...
5の組	...	-19	-7	5	17	29	...
6の組	...	-18	-6	6	18	30	...
7の組	...	-17	-5	7	19	31	...
8の組	...	-16	-4	8	20	32	...
9の組	...	-15	-3	9	21	33	...
10の組	...	-14	-2	10	22	34	...
11の組	...	-13	-1	11	23	35	...

図表 4-3 整数を差が12の倍数になる12組に分けた表

図表 4-3 の「0 の組」は、時計では12時の位置に対応します。0 と12の差も12の倍数だからです。

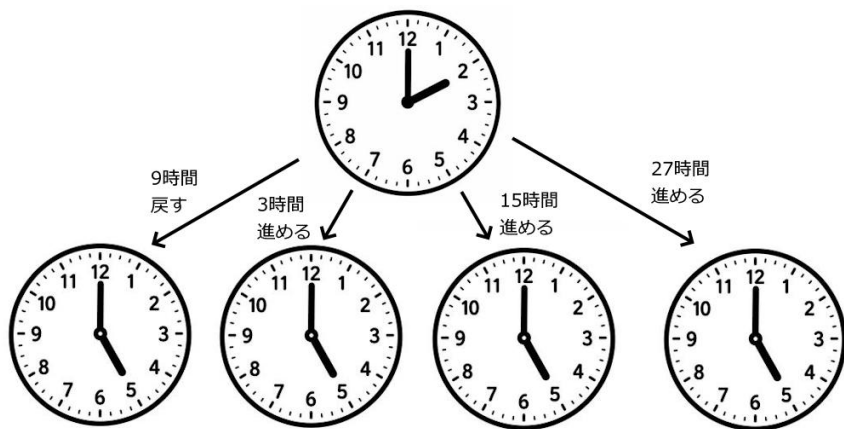
12組できました。整数全体が、重なりなく、余りなく、組に分けられました。これを**類別**といい、できた組の一つ一つを**同値類**といいます。

第3章で、時計の群は C_{12} であると言いました。「1時間進める」という操作を12回繰り返すと元に戻る、12個の操作でできた群です。

この12個のうち、「3時間進める」を考えてみます。2時に合わせた時計の針を3時間進めると、5時を指します。では15時間進めたらどうでしょうか。27時間進めても、9時間戻しても、5時です。

2時である必要はありません。何時から始めても、3時間進めても、15時間進

めても、27 時間進めても、9 時間戻しても、結果は同じです。進める時間数の差が 12 の倍数なら、針は同じところに来る。「3 時間進める」と「15 時間進める」は、時計の操作としては区別がつかないのです。



図表 4-4 異なる時間だけ動かしても同じ 5 時になることを示す図

§4.6 時刻と操作の違い

ここで注意してほしいことがあります。

この第 4 章の最初で取り上げた「2」と「14」は、時刻でした。今の、「3 時間進める」「15 時間進める」の「3」や「15」は、操作の大きさです。同じ整数ですが、表しているものが違うのです。

関係のほうは、どちらも「差が 12 の倍数」で同じです。ですから、できる組も同じ 12 組になります。この 12 組を時刻として読めば、文字盤の 12 個の位置。操作の大きさとして読めば、時計を動かす 12 種類の操作です。

「違うのはわかったけど、結局 12 なんだから、どっちでもいいんでしょ」。違

います。はっきり区別しなければなりません。

違いは、合成できるかどうかです。

時刻は、ただの 12 個の位置 (状態) です。「2 時」と「5 時」を合成することはできません。一方、「3 時間進める」と「5 時間進める」は合成できて、「8 時間進める」になります。

ですから、時計の群 C_{12} とは、操作の 12 組であって、時刻の 12 組ではないのです。時刻は、群ではなく、群が動かす対象です。

第 1 章で、操作は e, r, f と書き、状態は $[123]$ のように角括弧で書き分けました。状態と操作は、区別しなければならないのです。



図表 4-5 2 時と 5 時の合成？

そう見ると、「3 時間進める」という操作は、3 という数だけを指すのではなく、 $\dots, -9, 3, 15, 27, \dots$ というひとかたまり全体を指していることになります。これは、図表 4-3 の 3 の組そのものです。

12 個の同値類は、時計を動かす 12 種類の操作と一つずつ対応しています。そこで、それぞれの同値類を、操作の名前として使うことができます。

§4.7 「同じ」を線でつないでみる

同値関係と同値類を、図で見てみましょう。

図表 4-6 ①のようなシフォンケーキを、同じような切り方で3等分するとします。イメージが湧かない方は、第4章のまとめにある図表 4-9 をご覧ください。

図表 4-6 ②のように、内側の三角形の頂点と、外側の円周を 120° ずつに分けた位置に点をつけます。

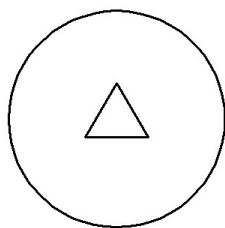


図4-6①

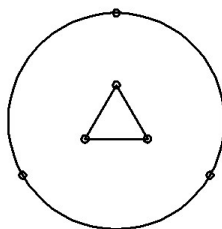


図4-6②

図表 4-6 シフォンケーキと6つの点の配置

最初に思いつくのは、図表 4-7 ①のような切り方でしょう。1本目を 120° ずつ回転させると、3本の切れ目ができます。他にないか考えると、②のような切り方もありますね。その逆向きに結べば、③のようにも切れます。同じ6つの点でも、いくつかの「つなぎ方」があるわけです。

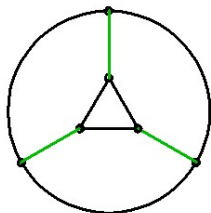


図4-7①

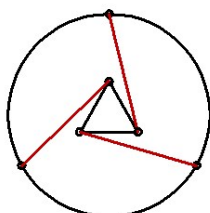


図4-7②

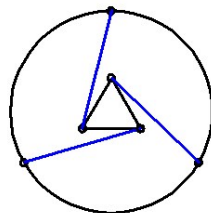


図4-7③

図表 4-7 同じ6つの点に対する3通りのつなぎ方

ここで、6つの点を e, r, r^2, f, rf, r^2f と名づけます (図表 4-8)。これらの記号は、第 1 章で正三角形の操作につけた名前を引き継いでいます。

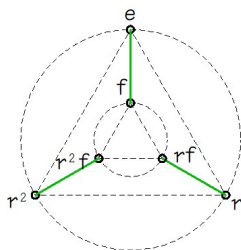


図4-8①

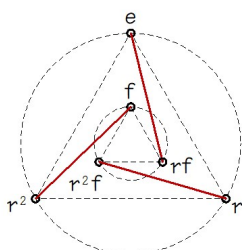


図4-8②

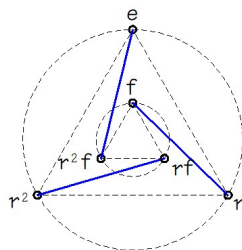


図4-8③

図表 4-8 6つの点に e, r, r^2, f, rf, r^2f を割り当てた図

図表 4-8 ①では、 e と f 、 r と rf 、 r^2 と r^2f が結ばれています。線で結ばれた2つを「同じ仲間」と考えると、 $\{e, f\}$ 、 $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ という3つのまとまりができます。

このように、どの点とどの点を「同じ」とみなすかを決めます。この関係が反射律・対称律・推移律を満たすとき、**同値関係**と呼びます。そして、その関係によってできた一つ一つのまとまりが**同値類**です。

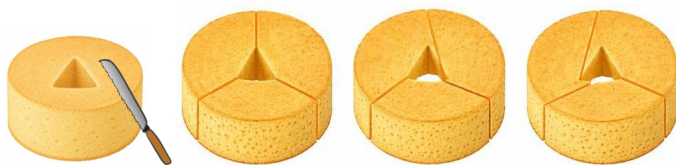
つまり、同値関係は「つなぎ方」、同値類は「そのつなぎ方でできたまとまり」と見ることができます。

②や③のように、「同じ」とみなす関係が変われば、できる同値類も変わります。

今度は、群の演算から、このようなまとまりがどのように現れるのかを考えます。そこで現れるまとまりが「剰余類」です。

第4章のまとめ

- 「等しい」と「同じ」は違う。ルールを決めると、等しくないものを「同じ」と呼べる。
- 「同じ」と呼ぶには、反射律、対称律、推移律の三つの条件を満たさなければならない。
- 三つを満たす決め方を同値関係という。
- 同値関係があると、全体が重なりなく、余りなく、組に分かれる（なぜかは、第5章で確かめる）。これを類別という。できた組の一つ一つを同値類という。
- 同じ12組でも、時刻として読むか操作として読むかで役割が違う。合成できるのは操作のほうで、群になるのも操作のほう。



図表 4-9 同値類シフォンケーキ

問題

問 4-1

「同じ誕生日である」は同値関係ですか。三つの条件で確かめてください。

問 4-2

「 a と b は、どちらも偶数か、どちらも奇数である」は同値関係ですか。同値関係なら、整数は何組に分かれますか。

問 4-3

時計を 24 時間表記にすると、整数は何組に分かれますか。

問 4-4

実数全体 (R) に、関係 $\sim$ を、「 $x \sim y \iff x^2 = y^2$ 」によって定義します。これは「 $x^2 = y^2$ であるとき、かつ、そのときに限り、 $x \sim y$ と定める。」という意味です。

1. 次の命題 ****1** が真か偽か判定してください。

① $3 \sim -3$ ② $3 \sim 2$

2. この関係が次の性質を満たすか、理由を付けて確認してください。

反射律、対称律、推移律

3. 次の①②を求めてください。 n の同値類 (n は実数) とは、「 n と関係 $\sim$ にある実数をすべて集めた集合」のことです。答えは集合 ($\{ \}$) の形で書くこと。

① 3 の同値類 ② 0 の同値類

4. 次の二つの記述の違いを説明してください。

A : $3 \sim -3$ B : 3 は、3 の同値類に属する

****1** 命題 (めいだい) とは、正しい (真) か、間違っている (偽) かが、はっきりと決まる文章や式のこと。

解答

4-1 同値関係である。

反射律：自分は自分と同じ誕生日日である。

対称律：A と B が同じ誕生日日なら、B と A も同じ誕生日日である。

推移律：A と B、B と C が同じ誕生日日なら、A と C も同じ誕生日日である。

誕生日日により、人の集まりが最大 366 組に分かれる。

4-2 同値関係である。偶数の組と奇数の組の 2 組に分かれる（差が 2 の倍数、 と言い換えれば時計と同じ形になる）。

4-3 24 組

4-4

この問題の定義 $x \sim y$ は、 x と y の絶対値が等しいということを表したものである（実数では、 $x^2 = y^2 \iff |x| = |y| \iff y = x$ または $y = -x$ ）。 x と y は単なる変数である。

1. ① $3^2 = (-3)^2 = 9$ 真。② $3^2 = 9$ 、 $2^2 = 4$ 偽。

2. 反射律：任意の実数 x について、 $x^2 = x^2$ である。したがって、 $x \sim x$ であり、反射律は成立する。

対称律： $x \sim y$ とする。定義から、 $x^2 = y^2$ 。等号の左右を入れ替えると、 $y^2 = x^2$ であるから、 $y \sim x$ 。よって、対称律は成立する。

推移律： $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とする。定義から $x^2 = y^2$ 、 $y^2 = z^2$ である。等号の推移性から、 $x^2 = y^2 = z^2$ 。よって、 $x \sim z$ であるから、推移律は成立する。

以上から、この関係は同値関係である。

3. ① $\{3, -3\}$ ② $\{0\}$

この問題では、「関係がある」とは「2 乗が同じ」という意味である。3 の

同値類を求めるときは、一方を 3 に固定し、 $x \sim 3$ を満たす x をすべて探せばよい。

4.A は「 3 と -3 の間に、関係 $\sim$ が成り立つ」という命題である。同値類の言葉に直せば、「 -3 は 3 の同値類に属する」と言い換えられる。B は「 3 が、 3 の同値類という集合の要素である」という命題である。同値類の定義から、これは $3 \sim 3$ が成り立つことを意味し、反射律によって保証される。二つは、述べている中身が違う。A は数と数の関係で、B は数と集合の関係、つまり所属である。A の左右はどちらも数だが、B の左は数、右は集合である。