

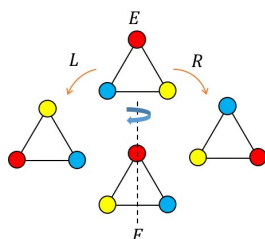
第6章 第1～5章の確認問題

問6-1を除き、本書では、あとから行う操作を左に書きます (§1.5)。 $g \circ h$ は「先に h 、次に g 」という意味です。

問6-1

正三角形のカードの3つの頂点に、図のように赤・黄・青の印が付いています。最初は、赤が上、黄が右下、青が左下にあります。次の操作を考えます。

- E：何も動かさない
- R：カードを時計回りに 120 度回転する
- L：カードを反時計回りに 120 度回転する
- F：上の頂点と対辺の中点を通る直線を軸として裏返す



図表 6-1

操作は、書かれている順番に行います。R-F とは、R を行って、F を行うという意味です。本書の合成記号では、あとから行う操作を左に書くので、R-F は $F \circ R$ と表します。

(1) R を行ったあとに F を行いました。赤・黄・青は、それぞれどの位置にあり

ますか。

- (2) 次のうち、2つの操作を行ったあと、カードが最初と同じ状態に戻るものをすべて選んでください。

ア R-R イ R-L ウ F-F エ F-R オ E-E

- (3) 最初に R を行いました。次にどの操作を行えば、最初の状態に戻りますか。
(4) R を 3 回続けて行くと、カードはどのような状態になりますか。
(5) R-F は、行う順番を入れ替えても同じ結果になりますか。

問 6-2

正六角形を動かして元の位置に重ねる操作を考えます。

- (1) 0° 回転（恒等操作）も含めると、回転は何個ありますか。
(2) 鏡映は何個ありますか。
(3) 操作は全部で何個ありますか。

問 6-3

- (1) $C_3 = \{e, r, r^2\}$ において、生成元になれる操作をすべて挙げてください。
(2) $C_4 = \{e, r, r^2, r^3\}$ において、生成元になれる操作をすべて挙げてください。

問 6-4

D_3 の群について考えます。操作を $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ とします。

- (1) H は位数 2 の部分群の 1 つとします。位数 2 の部分群とその左剰余類について、間違っているものは、次のうちどれですか。

ア. 位数 2 の部分群は $\{e, f\}$ 、 $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ の 3 つである。

イ. 剰余類 gH の g には、 $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ のどれが入ってもよい。ただ

し、同じ剰余類が重複して出てくる。

ウ．異なる左剰余類だけを取り出すなら、代表元として $\{e, r, r^2\}$ を選ぶことができる。

エ． D_3 の部分群 H について、 g と h が同じ剰余類に入るかどうかを判定する条件は、 $g^{-1} \circ h \in H$ である。

(2) 次の合成は、 D_3 の 6 つの操作のうち、どれになりますか。

- ① $f \circ r$ ② $f \circ r^2$

(3) $H = \{e, f\}$ とします。左剰余類 eH 、 rH 、 r^2H 、 fH の要素を書いてください。また、異なる左剰余類は何個ありますか。

問 6-5

写像の合成を演算とする操作の集合について、群になることを確認するための 3 条件として正しいものはどれですか。

- ア．閉じている・単位元がある・逆元がある
イ．交換則が成り立つ・単位元がある・逆元がある
ウ．閉じている・要素数が有限である・逆元がある
エ．単位元がある・交換則が成り立つ・結合則が成り立つ

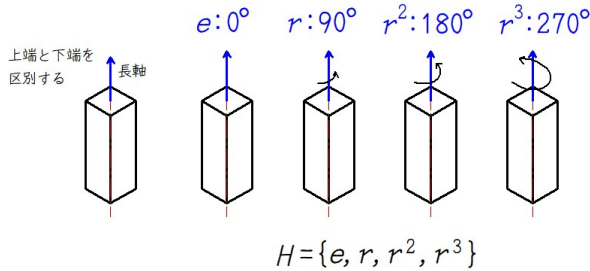
問 6-6

問 6-1 のカードの操作について考えます。次の集合のうち、合成について群になるものをすべて選んでください。また、群にならないものについては、問 6-5 の 3 条件のうち満たされないものをすべて答えてください。

- ア $\{E, R, L\}$ イ $\{E, F\}$ ウ $\{E, R, F\}$ エ $\{R, L\}$

問 6-7

図表 6-2 のような、3D-CAD で作った正方形断面の部品を考えます。

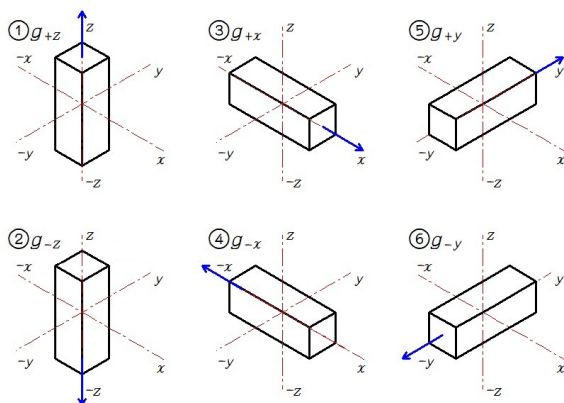


図表 6-2

- 部品には上端と下端の区別があります。
- 長軸まわりに 90° 回転しても、見た目は変わりません。
- この部品を、CAD の座標軸に沿った姿勢から、ふたたび座標軸に沿った姿勢へ移す回転の全体を G とします。
- 最初の姿勢を保ったまま、見た目を変えない回転全体を H とします。

長軸まわりの 90° 回転を r とすると、 $H = \{e, r, r^2, r^3\}$ です。ここで、 $e: 0^\circ$ 、 $r: 90^\circ$ 、 $r^2: 180^\circ$ 、 $r^3: 270^\circ$ を表します。

部品の長軸を、それぞれ $+z, -z, +x, -x, +y, -y$ の方向へ向ける操作のうち 1 つを選び、 $g_{+z}, g_{-z}, g_{+x}, g_{-x}, g_{+y}, g_{-y}$ とします。最初の姿勢はすでに $+z$ 方向を向いているので、 $g_{+z} = e$ を選びます。



図表 6-3

(1) 剰余類 $g_{+x}H$ の要素をすべて書いてください。

(2) (1) で書いた操作は、操作履歴としては異なります。それにもかかわらず、部品の最終的な見た目がすべて同じになる理由を説明してください。

(3) $g_{+z}H = H$ となることを確かめてください。また、剰余類

$$g_{-z}H, g_{+x}H, g_{-x}H, g_{+y}H, g_{-y}H$$

に入る操作では、それぞれ部品の長軸がどの方向を向きますか。

(4) $g \sim h \iff g^{-1} \circ h \in H$ を使って、次の 2 組が同じ剰余類に入るかどうかを判定してください。

$$(a) g_{+x} \text{ と } g_{+x} \circ r^2 \quad (b) g_{+x} \text{ と } g_{+z}$$

(5) 任意の操作 $g \in G$ について、回転後の部品の長軸は、必ず $+z, -z, +x, -x, +y, -y$ のどれか 1 方向を向きます。このことと、反射律 ($g \sim g$) を使って、 g が 6 個の剰余類のどれかに必ず入ることを説明してください。

(6) 2 つの剰余類 aH と bH に、共通の操作 z があるとします。つまり、 $a \sim z$, $b \sim z$ です。対称律・推移律を使って $a \sim b$ を導き、それが何を意

味するかを説明してください。

(7) $H = \{e, r, r^2, r^3\}$ と $g_{+x}H$ について、この対応を $s \mapsto g_{+x} \circ s$ の形で 4 組すべて書き、 H と $g_{+x}H$ の要素数が同じになることを確認してください。

(8) (3)～(7) より、 G は 6 個の異なる剰余類に、余りなく、重なりなく分かれます。また、各剰余類の要素数は $|H| = 4$ です。 G の操作を 1 つずつ数えずに、 $|G|$ を求めてください。

(9) 次の文の () を適切な数値で埋めてください。

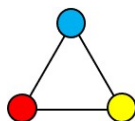
24 通りの回転操作は、見た目が同じ操作が () 通りずつ集まり、全部で () 個の剰余類に分かれる。

解答

6-1

恒等操作、逆操作、何回繰り返すと元に戻るか、順序を入れ替えると結果が変わること（非可換性）を扱っていますが、小学生でも解ける問題です。

(1) 赤：左下、黄：右下、青：上



図表 6-4

(2) イ、ウ、オ (3) L (4) 最初の状態に戻る。 (5) 同じ結果にならない。

6-2

(1) 6 (2) 6 (3) 12

この 12 個の操作全体が、正六角形の対称性を表す群 D_6 です。したがって、 D_6 の位数は 12 です。

6-3

(1) r と r^2 。 e からは e しか生成されないで、生成元にはなりません。

(2) r と r^3 。有限の巡回群では、ある元を繰り返して、初めて e に戻る回数が群の位数と等しいときに限り、その元が生成元になります。 C_4 では、 r と r^3 はどちらも 4 回で初めて e に戻ります (r^2 は 2 回、 e は 1 回です)。

6-4

(1) **ア** $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ は、単位元 e を含まないので部分群ではありません。

D_3 の位数 2 の部分群は、 $H_1 = \{e, f\}$ 、 $H_2 = \{e, rf\}$ 、 $H_3 = \{e, r^2f\}$ の 3 つです。イ、ウ、エは正しい。

(2) $f \circ r \circ f = r^{-1}$ より、 $f \circ r = r^{-1} \circ f = r^2f$ 、 $f \circ r^2 = r^{-2} \circ f = rf$ です。

したがって、① r^2f ② rf です。

(3) 各剰余類は、次のとおりです。

$$eH = \{e \circ e, e \circ f\} = \{e, f\}$$

$$rH = \{r \circ e, r \circ f\} = \{r, rf\}$$

$$r^2H = \{r^2 \circ e, r^2 \circ f\} = \{r^2, r^2f\}$$

$$fH = \{f \circ e, f \circ f\} = \{f, e\}$$

fH は eH と同じ剰余類です。判定条件で確かめると、 $e^{-1} \circ f = f \in H$ です。

したがって、異なる左剰余類は **3** 個です。 D_3 の 6 個の操作が、2 個ずつ 3 つの剰余類に分かれます ($6 = 2 \times 3$)。これは、問 6-7 で扱うラグランジュの定理の具体例です。

6-5 ア 写像の合成を演算とする場合、群になることを確認する 3 条件は、組み合わせた結果が閉じていること、何もしない操作（単位元）があること、どの操作にも打ち消す操作（逆元）があることの 3 つです。

6-6 ア と **イ**。ウは閉性と逆元、エは閉性と単位元を満たしていない。

6-7 学習のポイント

① 反射律、対称律、推移律については、§5.7 を参照。

② 「余りなく」は、反射律 ($g \sim g$) から言える (§5.8 参照)。

- ③ 「重なりなく」は、対称律・推移律から言える (§5.8 参照)。
- ④ H と各剰余類は、 g と g^{-1} による一対一対応で、同じ要素数になる (§5.9.1 参照)。
- ⑤ ②～④をまとめると、 $(Gの位数) = (Hの位数) \times n$ というラグランジュの定理の式になる (§5.9.2 参照)。

(1)剰余類を書く問題。

$H = \{e, r, r^2, r^3\}$ なので、 $g_{+x}H = \{g_{+x}, g_{+x} \circ r, g_{+x} \circ r^2, g_{+x} \circ r^3\}$ です。

(2)CAD 上の意味を考える問題。

操作 e, r, r^2, r^3 の結果は、見た目には区別がつきません。そのあと、すべてに同じ操作 g_{+x} を行っても、最終的にはすべて長軸が $+x$ を向いた同じ見た目になります。

(3)剰余類と長軸の向きを対応させる問題。

$g_{+z} = e$ なので、

$$g_{+z}H = \{e \circ e, e \circ r, e \circ r^2, e \circ r^3\} = \{e, r, r^2, r^3\} = H$$

です。

次に、 H の要素 s は長軸を $+z$ のまま保ちます。したがって、 $g \circ s$ (先に s 、次に g) で長軸がどちらを向くかは、 g だけで決まります。よって、 $g_{-z}H, g_{+x}H, g_{-x}H, g_{+y}H, g_{-y}H$ に入る操作では、長軸はそれぞれ $-z, +x, -x, +y, -y$ を向きます。

したがって、 $g_{+z}H, g_{-z}H, g_{+x}H, g_{-x}H, g_{+y}H, g_{-y}H$ では、長軸の向きがそれぞれ異なります。このため、この 6 個の剰余類は互いに異なります。

(4) 同じ剰余類に入るかを判定する問題。

1 項目を g 、2 項目を h とすると、(a) は $g = g_{+x}$ 、 $h = g_{+x} \circ r^2$ 、(b) は $g = g_{+x}$ 、 $h = g_{+z}$ です。

(a) 判定条件の左辺は

$$g_{+x}^{-1} \circ (g_{+x} \circ r^2) = (g_{+x}^{-1} \circ g_{+x}) \circ r^2 = e \circ r^2 = r^2 \in H$$

です。したがって、同じ剰余類に入ります。

(b) $g_{+z} = e$ なので、判定条件の左辺は

$$g_{+x}^{-1} \circ g_{+z} = g_{+x}^{-1} \circ e = g_{+x}^{-1}$$

です。仮に $g_{+x}^{-1} \in H$ なら、 H は部分群なので逆元 g_{+x} も H に入ります。しかし、 H の操作は長軸を $+z$ に保つのに対し、 g_{+x} は長軸を $+x$ へ動かします。これは矛盾します。したがって、 $g_{+x}^{-1} \circ g_{+z} \notin H$ であり、同じ剰余類には入りません。

(5) 「余りなく」を確認する問題。

H は部分群なので $e \in H$ です。よって $g^{-1} \circ g = e \in H$ 、すなわち $g \sim g$ (反射律) が成り立ちます。したがって、 g は自分自身の剰余類 gH に入ります。

次に、 g で回した後の長軸の向きを見ます。例えば $+x$ を向くなら、 $g_{+x}^{-1} \circ g$ は、先に g で長軸を $+z$ から $+x$ へ向け、次に g_{+x}^{-1} で $+x$ から $+z$ へ戻す操作です。したがって $g_{+x}^{-1} \circ g \in H$ であり、 $g_{+x} \sim g$ です。同値な要素が定める剰余類は同じなので (§5.8)、 $gH = g_{+x}H$ となります。反射律から $g \in gH$ だったので、 $g \in g_{+x}H$ です。

長軸が $-z, -x, +y, -y, +z$ を向く場合も同様です。したがって、どの操作 g も 6 個の剰余類のいずれかに必ず入ります。これが「余りなく」です。

(6)「重なりなく」を確認する問題。

$a \sim z, b \sim z$ とします。対称律により $z \sim b$ です。 $a \sim z$ と $z \sim b$ から、推移律により $a \sim b$ です。したがって §5.8 より $aH = bH$ です。つまり、2つの剰余類が1つでも要素を共有すれば完全に同じ剰余類になります。よって、異なる剰余類どうしは重なりません。

(7) H との対応を確認する問題。

$$e \mapsto g_{+x} \circ e = g_{+x}, \quad r \mapsto g_{+x} \circ r, \quad r^2 \mapsto g_{+x} \circ r^2, \quad r^3 \mapsto g_{+x} \circ r^3$$

逆に、 $g_{+x}H$ の各要素に左から g_{+x}^{-1} を合成すると、 $g_{+x}^{-1} \circ (g_{+x} \circ s) = s$ となり、元の s に戻ります。別々の s からは別々の要素ができ、それぞれ元に戻せるので、 H の4つの要素と $g_{+x}H$ の4つの要素は一対一に対応します。したがって、要素数は同じ4個です。

(8)ラグランジュの定理です。

$$|G| = |H| \times n = 4 \times 6 = 24。$$

(9)24通りの回転操作は、見た目が同じ操作が4通りずつ集まり、全部で6個の剰余類に分かれます。