

第7章 正規部分群と商群

群論という抽象数学への道を登り始めて、剰余類まで来ました。この章では、剰余類の「向き」に注目して正規部分群を導入し、剰余類そのものを要素とする新しい群である商群を作ります。これは第8章の準同型へとつながります。

§7.1 右剰余類の定義

これまでの剰余類 gH は、 H の中の操作 s を先に行い、そこに g を後から続けて行った結果を全部集めた集合でした。

$$gH = \{g \circ s \mid s \in H\}$$

ここで順番を入れ替え、 g を先に行い、 H の中の操作を後から続けて行った結果を集めます。

第5章（図表5-1）では、 H の要素を列（先）にとり、各行を横に読んで gH を作りました。逆に、 H の要素を行（後）にとり、列 g を縦に読むと、 g を先に行い、 H の操作を後から行った結果が並びます。これが、右から合成した剰余類です。

G の部分群 H と、 G の要素 g に対して、

$$Hg = \{s \circ g \mid s \in H\}$$

を、 H による g の右剰余類と呼びます。これと区別するため、これまでの剰余類 gH を左剰余類と呼びます。

「左」「右」は、式の中で g を H の左に書くか右に書くかを表しており、操作の順番を表すものではありません。 $\circ$ は右側の操作を先に行うので、左剰余類 gH では g が後、右剰余類 Hg では g が先になります。

例として、 D_3 の位数 2 の部分群 $H = \{e, f\}$ の右剰余類を求めます。
 $f \circ r = r^2 f$ 、 $f \circ r^2 = r f$ を使うと、

$$He = \{e, f\}, \quad Hr = \{r, r^2 f\}, \quad Hr^2 = \{r^2, r f\}$$

の 3 つです。左剰余類と同じく、右剰余類も D_3 を重なりなく 3 つに分けています。

§7.2 左剰余類と右剰余類の比較

同じ $H = \{e, f\}$ による左剰余類は、

$$H = \{e, f\}, \quad rH = \{r, r f\}, \quad r^2 H = \{r^2, r^2 f\}$$

でした。右剰余類と並べると、 H 自身は一致しますが、 $Hr = \{r, r^2 f\}$ と $Hr^2 = \{r^2, r f\}$ は、左剰余類のどれとも一致しません。

このずれを乗積表で確かめます (図表 7-1)。

		左剰余類 gH 部分群 H (先)					右剰余類 Hg 部分群 H (後)		
		左	e	f			右	e	f
操作 g (後)	e	e	e	f	操作 g (先)	e	e	e	f
	r	r	r	$r f$		r	r	r	$r^2 f$
	r^2	r^2	r^2	$r^2 f$		r^2	r^2	r^2	$r f$

		左剰余類 gH 部分群 H (先)					右剰余類 Hg 部分群 H (後)		
		左	e	f			右	e	f
操作 g (後)	e	e	H	H	操作 g (先)	e	e	H	H
	r	r	rH	rH		r	r	rH	$r^2 H$
	r^2	r^2	$r^2 H$	$r^2 H$		r^2	r^2	$r^2 H$	rH

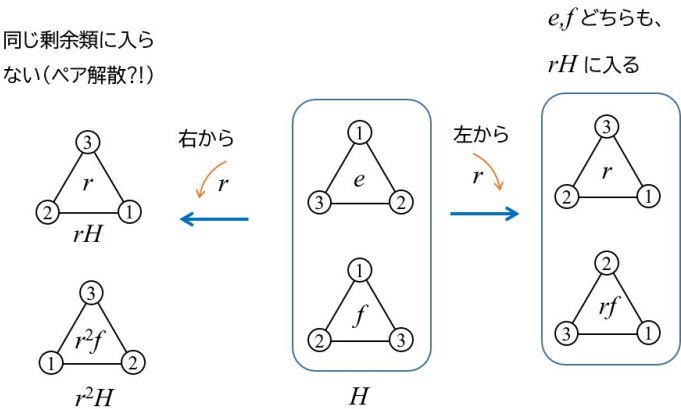
図表 7-1 左剰余類と右剰余類の乗積表

左表は、行が代表元 g 、列が H の要素 h で、上段が $g \circ h$ 、下段がそのセルの属する左剰余類です。どの行も 1 つの左剰余類で揃っています。これは左剰余類の定義から当然です。

右表は、行と列は左表と同じで、セルを $h \circ g$ にしたもの、つまり g をまず行い、そこに H 中の操作を後から続けて行った結果です。下段は左表と同じく、セルが属する左剰余類です。 r の行を見ると、 e 列は rH 、 f 列は r^2H と、1 つの行に 2 つの左剰余類が混ざっています。 r^2 の行も同様です。

つまり、右剰余類 $Hr = \{r, r^2f\}$ のうち、 r は左剰余類 rH に、 r^2f は r^2H に属し、 Hr は 2 つの左剰余類にまたがっています (図表 7-2)。

r を左から合成するか、右から合成するか



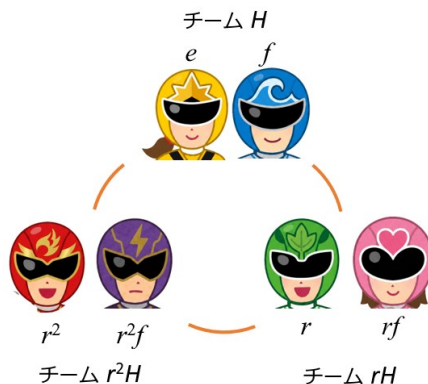
Hr の 2 要素は、別々の左剰余類 rH, r^2H にまたがる

図表 7-2 右剰余類と左剰余類の対応

このことを、剰余類戦隊 D_3 で説明してみます。

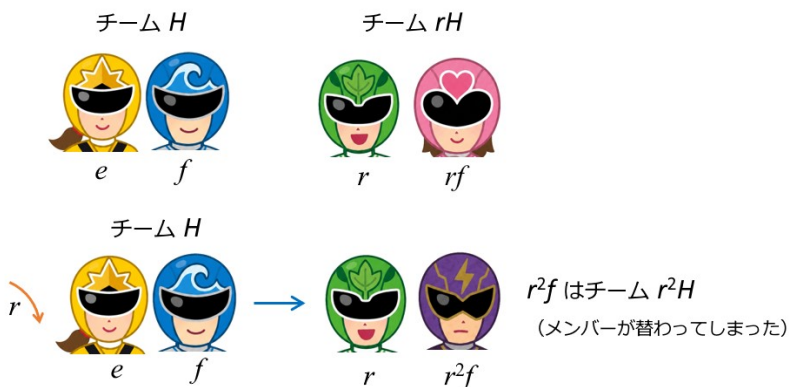
剰余類戦隊の任務は、遊園地のヒーローショーの出演です。二人一組で順番に

出演します。基準ペアはチーム $H = \{e, f\}$ で、ほかはチーム $rH = \{r, rf\}$ 、
 チーム $r^2H = \{r^2, r^2f\}$ です（図表 7-3）。



図表 7-3 剰余類ごとのチーム分け

コンピュータは、チームに左から操作 r を行って、次に出演する組をスクリーンに表示します。ところが、「いつも左からではなく、右からも操作して、同じ r なのだから問題ないはず」とすると、図表 7-4 のようになります。



図表 7-4 右から操作したときのチーム

チーム H に右から r を作用させると、 $rH = \{r, rf\}$ ではなく、 $Hr = \{r, r^2f\}$ が表示されました。このペアは、元のチームのどれでもありません。同じ操作 r でも、左から行くか右から行くかで結果が変わるのです。

§7.3 正規部分群

では、 H を位数 3 の部分群 $H = \{e, r, r^2\}$ にすると、どうなるでしょう。 H による左剰余類は H と fH の 2 つなので、代表元は e と f で足りません (図表 7-5)。

		左剰余類 部分群 H (先)						右剰余類 部分群 H (後)			
操作 g (後)	左	e	r	r^2		操作 g (先)	右	e	r	r^2	
	e	e	r	r^2			e	e	r	r^2	
	f	f	r^2f	rf			f	f	rf	r^2f	

		左剰余類 部分群 H (先)						右剰余類 部分群 H (後)			
操作 g (後)	左	e	r	r^2		操作 g (先)	右	e	r	r^2	
	e	H	H	H			e	H	H	H	
	f	fH	fH	fH			f	fH	fH	fH	

図表 7-5 位数 3 の部分群による左剰余類と右剰余類

図表 7-5 の赤で囲んだ部分は、セルの値は左右で違いますが、下段の属する剰余類で見ると左右で一致します。実際、

$$fH = \{f, f \circ r, f \circ r^2\} = \{f, r^2f, rf\}, Hf = \{f, r \circ f, r^2 \circ f\} = \{f, rf, r^2f\}$$

で、 $fH = Hf$ です。このように、 H の選び方によっては左剰余類と右剰余

類が一致します。

G の部分群 H が、すべての $g \in G$ について、

$$gH = Hg$$

を満たすとき、 H を G の正規部分群**1 と呼びます。

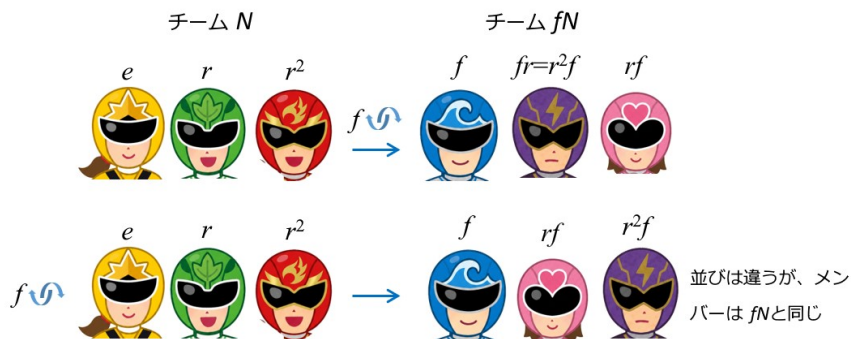
これに対して $H = \{e, f\}$ は、 $rH \neq Hr$ なので正規部分群ではありません。

ここでは、区別のために「非正規部分群」と呼びます。

なぜこの性質に特別な名前を付けるかというと、正規部分群があると、剰余類そのものを新しい群の要素として扱えるようになるからです。逆に、正規でない部分群では、代表元どうしの演算を使って剰余類どうしの演算を定めることができません。この違いを、§7.4～§7.6 で追いかけていきます。

これから、 D_3 の正規部分群 $\{e, r, r^2\}$ を N と書きます。 N は正規を意味する normal の頭文字です。

D_3 は、 $N = \{e, r, r^2\}$ と $fN = \{f, rf, r^2f\}$ の2つに分かれます。 N は回転だけ、 fN は鏡映だけの剰余類です。剰余類戦隊 D_3 で表すと、図表 7-6 のようになります。



図表 7-6 正規部分群による D_3 の分解

**1 定義は、すべての $g \in G$ についての条件です。図表 7-5 で確かめたのは代表元 e, f だけ

なので、残りの要素についても確かめます。 $g = r, r^2$ は H の要素なので、 $gH = H = Hg$ です。 $g = rf$ では、

$$rfH = \{rf, f, r^2f\}, \quad Hrf = \{rf, r^2f, f\}$$

で一致します。 $g = r^2f$ も同様に確かめられます。したがって、 $\{e, r, r^2\}$ は D_3 の正規部分群です。

§7.4 剰余類を1つの要素として見る

§7.3 で、 D_3 は正規部分群 $N = \{e, r, r^2\}$ を基準にすると、 $N = \{e, r, r^2\}$ と $fN = \{f, rf, r^2f\}$ の2つの剰余類に分かれることが分かりました。

この N と fN に注目して、 D_3 を観察してみましょう（図表 7-7）。

D_3 の乗積表

$\circ$	e	r	r^2	f	rf	r^2f
e	e	r	r^2	f	rf	r^2f
r	r	r^2	e	rf	r^2f	f
r^2	r^2	e	r	r^2f	f	rf
f	f	r^2f	rf	e	r^2	r
rf	rf	f	r^2f	r	e	r^2
r^2f	r^2f	rf	f	r^2	r	e

各セルを、 N か fN かで塗り分けたもの

$\circ$	e	r	r^2	f	rf	r^2f
e	N	N	N	fN	fN	fN
r	N	N	N	fN	fN	fN
r^2	N	N	N	fN	fN	fN
f	fN	fN	fN	N	N	N
rf	fN	fN	fN	N	N	N
r^2f	fN	fN	fN	N	N	N

$\circ$	N	fN
N	N	fN
fN	fN	N

図表 7-7 剰余類でまとめた D_3 の乗積表

図表 7-7 の中央は、各セルがチーム N かチーム fN かで塗り分けたものです。チームが 3×3 のブロックに固まっています。そこでさらに、「セルの値が何か」ではなく、「値がどちらの剰余類に入るか」だけで表を見ると、右のように表を小さくできます。

次に、 $H = \{e, f\}$ を基準として、チーム H 、 rH 、 r^2H で置き換えてみましょう（図表 7-8）。

各セルを、 H か rH か r^2H かで塗り分けたもの

$\circ$	e	f	r	rf	r^2	r^2f
e	H	H	rH	rH	r^2H	r^2H
f	H	H	r^2H	r^2H	rH	rH
r	rH	rH	r^2H	r^2H	H	H
rf	rH	rH	H	H	r^2H	r^2H
r^2	r^2H	r^2H	H	H	rH	rH
r^2f	r^2H	r^2H	rH	rH	H	H

$\circ$	H	rH	r^2H
H	H	?	?
rH	rH	?	?
r^2H	r^2H	?	?

図表 7-8 非正規部分群を基準にした乗積表

正規部分群を基準とすると、剰余類で乗積表を小さくすることができましたが、位数 2 の部分群 H を基準にしても、乗積表を小さくすることはできません。剰余類どうしの演算が代表元によって変わってしまい、もとの群の演算を使って、剰余類どうしの演算を定めることができないことが確認できました。

剰余類どうしの演算が代表元によらず決まることは、正規部分群なら一般に成り立ちます。その証明は問 7-5 で確認します。ここでは、乗積表から観察した結果を基に、新しい群を考えます。

§7.5 商群

正規部分群 N を使うと、剰余類 N 、 fN を 1 つの要素と見た乗積表が作れました (図表 7-7 右)。剰余類どうしの合成を $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ と定めま
す。この演算がきちんと定まるためには、代表元の選び方によらず結果が同じ剰余類に入ることが必要です。 N が正規部分群のとき、これが成り立ちます (問 7-5)。積 $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ は再び剰余類なので、閉じています。残る結

合則・単位元・逆元を確かめます。

- 結合則：もとの群 G の結合則から自動的に成り立ちます。
- 単位元： $N = eN$ が単位元です。 $(aN) \circ (eN) = (a \circ e)N = aN$ 、 $(eN) \circ (aN) = aN$ となります。
- 逆元： aN の逆元は $a^{-1}N$ です。 $(aN) \circ (a^{-1}N) = (a \circ a^{-1})N = eN = N$ 、 $(a^{-1}N) \circ (aN) = N$ となります。

このようにして作った新しい群を、 G の N による商群（剰余群ともいいます）と呼び、 G/N と書きます。

今回の例では、 $D_3/N = \{N, fN\}$ です。この乗積表（図表 7-7 右）を抜き出すと、図表 7-9 のようになります。

$\circ$	N	fN
N	N	fN
fN	fN	N

図表 7-9 商群の乗積表

§7.6 商群の意味

もとの D_3 には、 $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ の 6 個の要素がありました。商群 D_3/N では、 $\{N, fN\}$ と 2 個になります。何が起こったのかというと、要素を「回転側か、鏡映側か」という違いで粗く分けたということです。こうすることで、大きく複雑な群を、より小さな群にまとめて扱うことができるようになるのが商群です。

戦隊ヒーローで例えるなら、ギジュっちゅ遊園地のヒーローショーの出演は、

チーム N かチーム fN です。隊員 e, r, r^2, f, rf, r^2f は出演しますが、ヒーローたちはチームとしてひとくくりで扱われます。そのため、チーム N が出演する日にヒーロー r のファンが遊園地に行っても、出演者名には「チーム N 」とあるだけ、というイメージです。

第7章のまとめ

- 部分群 H に対して、左剰余類 gH と右剰余類 Hg がある。
- すべての $g \in G$ について $gH = Hg$ が成り立つ部分群を、正規部分群と呼ぶ。
- 正規部分群 N を使って乗積表の行と列を剰余類ごとにまとめると、各ブロックの答えは同じ剰余類にそろふ。そこで、各ブロックを1マスに縮めると、剰余類を要素とする新しい乗積表ができる。この新しい群を商群と呼び、 G/N と書く。
- 正規部分群でない場合は、異なる剰余類が混ざるブロックが生じる。そのため、もとの群の演算を使って、剰余類どうしの演算をこの方法で定めることはできない。

問題

$D_3 = \{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ 、 $N = \{e, r, r^2\}$ とします。

問 7-1

D_3 の位数2の部分群には $\{e, f\}$ 、 $\{e, rf\}$ 、 $\{e, r^2f\}$ の3つがあります。ここでは $H = \{e, rf\}$ とします。

- (1) 左剰余類 rH を求めてください。
- (2) 右剰余類 Hr を求めてください。
- (3) rH と Hr を比較し、 H が D_3 の正規部分群であるかどうかを説明してください。

問 7-2

$N = \{e, r, r^2\}$ 、 $fN = \{f, rf, r^2f\}$ とします。次の計算を通して、剰余類どうしの演算 $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ について、代表元を変えても積が属する剰余類が変わらないことを具体例で確かめてください。

- (1) $N \circ fN$ について、 N の代表元として r 、 fN の代表元として rf を選び、 $r \circ (rf)$ を計算してください。また、その結果が属する剰余類を答えてください。
- (2) $fN \circ fN$ について、左の fN の代表元として rf 、右の fN の代表元として r^2f を選び、 $(rf) \circ (r^2f)$ を計算してください。また、その結果が属する剰余類を答えてください。
- (3) 今度は、 $N \circ fN$ では代表元として e, f を、 $fN \circ fN$ では代表元として f, f を選んで計算してください。(1)、(2) と結果が属する剰余類を比較し、 $N \circ fN$ と $fN \circ fN$ の値を求めてください。

問 7-3

$H = \{e, f\}$ とします。 H と rH の合成を、代表元を変えて調べます。

- (1) H の代表元として e 、 rH の代表元として r を選び、 $e \circ r$ を求めてください。また、結果が属する左剰余類を答えてください。
- (2) H の代表元として f 、 rH の代表元として rf を選び、 $f \circ (rf)$ を求めてください。また、結果が属する左剰余類を答えてください。

- (3)(1)、(2)の結果から、 $H \circ rH$ を1つの剰余類として定められない理由を説明してください。

問 7-4

D_3 の正規部分群には、 $\{e\}$ 、 $N = \{e, r, r^2\}$ 、 D_3 自身の3つがあります。 $\{e\}$ と D_3 で割った商群について考えます。

- (1) $D_3/\{e\}$ の要素をすべて求めてください。また、要素数と、どの群と同じ構造かを答えてください。
- (2) D_3/D_3 の要素をすべて求め、要素数を答えてください。
- (3) D_3/N の要素数は2、 $D_3/\{e\}$ の要素数は6、 D_3/D_3 の要素数は1です。この3つを比較し、「 N で割ること」が D_3 をどのくらいの粗さで見ることに対応するか説明してください。

問 7-5

一般の群 G と正規部分群 N を考えます。2つの剰余類 aN, bN から代表元 a, b を選び、同じ剰余類から別の代表元 a', b' を選ぶと、 $a' = a \circ n_1$ 、 $b' = b \circ n_2$ と書けます。ただし、 $n_1, n_2 \in N$ です。以下で $(a' \circ b')N = (a \circ b)N$ を確かめ、剰余類どうしの演算が代表元によらないことを示します。

- (1) N は正規部分群なので $Nb = bN$ です。 $n_1 \in N$ であることから、ある $n_3 \in N$ を使って $n_1 \circ b = b \circ n_3$ と書けることを確かめてください。
- (2) (1) を使って、 $a' \circ b' = a \circ b \circ (n_3 \circ n_2)$ となることを確かめてください。
- (3) N が部分群であることから $n_3 \circ n_2 \in N$ です。これを使って $a' \circ b' \in (a \circ b)N$ を示し、さらに $(a' \circ b')N = (a \circ b)N$ となることを確かめてください。

解答

7-1

(1) $rH = \{r \circ e, r \circ rf\} = \{r, r^2f\}$ です。ここで、 $r \circ rf = r \circ r \circ f = r^2f$ です。

(2) $Hr = \{e \circ r, rf \circ r\} = \{r, f\}$ です。ここで、 $rf \circ r = r \circ (f \circ r) = r \circ r^2f = r^3f = f$ です。

(3) $rH = \{r, r^2f\} \neq \{r, f\} = Hr$ なので、 H は正規部分群ではありません。

7-2

(1) $r \circ (rf) = r \circ (r \circ f) = (r \circ r) \circ f = r^2f$ です。 $r^2f \in fN$ なので、結果は fN に属します。

(2) まず、 $f \circ r^2 = (f \circ r) \circ r = r^2f \circ r = r^2 \circ (f \circ r) = r^2 \circ r^2f = r^4f = rf$ です。したがって、 $(rf) \circ (r^2f) = r \circ (f \circ r^2) \circ f = r \circ (rf) \circ f = r^2$ となります。 $r^2 \in N$ なので、結果は N に属します。

(3) $N \circ fN$ について代表元 e, f を選ぶと、 $e \circ f = f \in fN$ です。(1) でも $r \circ (rf) = r^2f \in fN$ なので、代表元を変えても積が属する剰余類は fN です。したがって、 $N \circ fN = fN$ です。 $fN \circ fN$ について代表元 f, f を選ぶと、 $f \circ f = e \in N$ です。(2) でも $(rf) \circ (r^2f) = r^2 \in N$ なので、代表元を変えても積が属する剰余類は N です。したがって、 $fN \circ fN = N$ です。

7-3

(1) $e \circ r = r$ です。 $r \in rH = \{r, rf\}$ なので、結果は rH に属します。

(2) $f \circ (rf) = f \circ r \circ f = (f \circ r) \circ f = r^2f \circ f = r^2$ です。 $r^2 \in r^2H = \{r^2, r^2f\}$

なので、結果は r^2H に属します。

- (3) 同じ $H \circ rH$ の計算でも、代表元によって結果が rH または r^2H になります。そのため、 $H \circ rH$ を 1 つの剰余類として定めることはできません。

$H = \{e, f\}$ が正規部分群ではないためです。

7-4

- (1) $\{e\}$ による剰余類は、 D_3 の各要素を 1 つずつ含む集合です。したがって、

$$D_3/\{e\} = \{\{e\}, \{r\}, \{r^2\}, \{f\}, \{rf\}, \{r^2f\}\}$$

です。要素数は 6 です。 g と $\{g\}$ を対応させると、 $\{g\} \circ \{h\} = \{g \circ h\}$ となるので、 $D_3/\{e\}$ は D_3 と同じ構造です。

- (2) D_3 による剰余類は D_3 自身だけです。したがって、 $D_3/D_3 = \{D_3\}$ で、要素数は 1 です。

- (3) $D_3/\{e\}$ は、各要素を区別したままの最も細かい見方です。 D_3/D_3 は、すべての要素を 1 つにまとめた最も粗い見方です。 D_3/N はその中間で、「回転か鏡映か」という区別だけを残す見方です。

7-5

- (1) $n_1 \in N$ なので、 $n_1 \circ b \in Nb$ です。 N は正規部分群なので $Nb = bN$ です。

したがって、 $n_1 \circ b \in bN$ となり、ある $n_3 \in N$ を使って $n_1 \circ b = b \circ n_3$ と書けます。

- (2) $a' = a \circ n_1$ 、 $b' = b \circ n_2$ と (1) を使うと、

$$a' \circ b' = (a \circ n_1) \circ (b \circ n_2) = a \circ (n_1 \circ b) \circ n_2 = a \circ b \circ (n_3 \circ n_2)$$

となります。

- (3) $n_3, n_2 \in N$ で、 N は部分群なので $n_3 \circ n_2 \in N$ です。したがって、

$a' \circ b' \in (a \circ b)N$ です。剰余類の性質として、 $x \in yN$ ならば $xN = yN$ が成り立ちます。よって、

$$(a' \circ b')N = (a \circ b)N$$

となります。つまり、 aN 、 bN からどの代表元を選んでも、合成結果が属する剰余類は変わりません。そのため、 $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ を剰余類どうしの演算として定めることができます。

商群 G/N は、 G の要素を剰余類ごとにまとめて作った新しい群です。もとの群 G と、新しく作った商群 G/N の関係を目に見える形にするには、 G の各要素を、それが属する剰余類へ対応させればよさそうです。この「対応」は次章で考えます。