

第8章 準同型

本章から基本的に、群の元の合成は rf のように $\circ$ を省略し、並べて書きます。必要に応じて $\circ$ は用います。「あとから行う操作を左に書く」ことに変更はありません。

§8.1 6つが2つになる

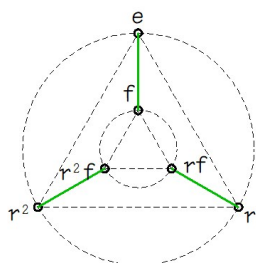


図4-8①

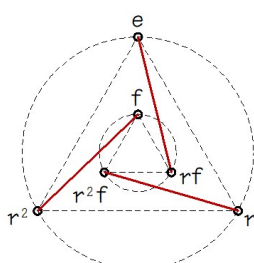


図4-8②

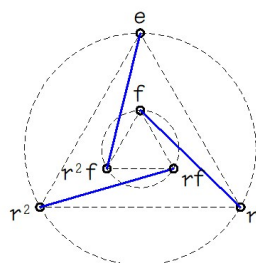


図4-8③

図表 4-8 (再掲) 6つの点に e, r, r^2, f, rf, r^2f を割り当てた図

この図①では、6つの元 e, r, r^2, f, rf, r^2f があり、 e と f 、 r と rf 、 r^2 と r^2f が線で結ばれています。以前は、「線で結ばれた2つを同じ仲間と考える」として、 $\{e, f\}$ 、 $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ という3つの同値類を作りました。この段階では、まだ線を人間が引き、「この二つを同じとみなそう」と先に決めています。

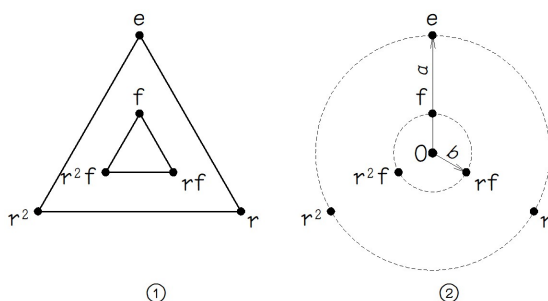
ところが、第5章で見たように、この図に群の演算を使うと、その線を計算によって引けるようになります。 $H = \{e, f\}$ を選び、二つの元 g, h について、

$g^{-1}h \in H$ なら線で結ぶと決めます。すると、まず $e^{-1}f = f \in H$ なので、 e と f を結びます。次に $r^{-1}(rf) = f \in H$ なので、 r と rf を結びます。同じように、 $(r^2)^{-1}(r^2f) = f \in H$ なので、 r^2 と r^2f も結ばれます。一方、たとえば e と r なら、 $e^{-1}r = r \notin H$ なので、この二つは結びません。結果として、 $\{e, f\}$ 、 $\{r, rf\}$ 、 $\{r^2, r^2f\}$ という同じつながり方が現れます。

これが「群には、この線を自分で引く仕組みがある」という意味です。その「線を引く仕組み」が $g^{-1}h \in H$ で、 $H = \{e, f\}$ は、「どの違いまでなら無視して同じとみなすか」という基準です。また、 e は「違いなし」、 f は「 f だけ違う」と考えると、 f だけ違う二つの元は同じ仲間にするという見方になります。

すると、 $e \leftrightarrow f$ 、 $r \leftrightarrow rf$ 、 $r^2 \leftrightarrow r^2f$ と、自動的に線が引かれます。

同じ仲間という関係を、群の演算そのものから作れるのです。こうしてできた「同じ仲間」が剰余類でした。さらに前章では、正規部分群によってできた剰余類をそれぞれ一つの要素として扱い、商群を作りました。本章では、細かな違いをまとめても群の計算が残るという現象を、別の方向から見ていきます。



図表 8-1 「6つの要素を2つの仲間として見る」図

図①は、三角形の対称操作からできる群 D_3 の6つの要素 $\{e, r, r^2, f, rf, r^2f\}$ を6個の点として並べたものです。外側の正三角形の頂点には e, r, r^2 がありま

す。内側の正三角形の頂点には f, rf, r^2f があります。外側と内側の正三角形は同じ中心をもっています。この共通の中心を O^{**1} とします。

****1** 厳密には、正三角形の外心。

図②では、中心 O から各点までの距離に注目します。 e, r, r^2 の3点は、 O から同じ距離 a の位置にあります。 f, rf, r^2f の3点は、 O から同じ距離 b の位置にあります。ここで、 $a \neq b$ です。したがって、6個の点は、中心 O からの距離だけに注目すると、 $\{e, r, r^2\}$ と $\{f, rf, r^2f\}$ という2種類に分けて見ることができます。ここで、 $\{e, r, r^2\} = N$ 、 $\{f, rf, r^2f\} = fN$ と名前をつけます。前章に登場した、 D_3 の正規部分群と剰余類です。つまり、6つの要素を N と fN の2つの仲間として見るということです。

§8.2 変わるもの・変わらぬもの

6つの要素を $N = \{e, r, r^2\}$ と $fN = \{f, rf, r^2f\}$ の2つに分けました。これは、前章で作った商群 $D_3/N = \{N, fN\}$ の2つの要素そのものです。前章では、この2つをそれぞれ一つの要素として扱うと、 $N \circ N = N$ 、 $N \circ fN = fN$ 、 $fN \circ N = fN$ 、 $fN \circ fN = N$ と計算でき、この2つの要素からなる集合が群になることも確認しました。つまり、 D_3 の6つの要素を N と fN の2つにまとめても、合成の仕組みは残っています。本節では、この商群を別の群と比べてみます。

8.2.1 D_3 から C_2 への写像をつくる

ここで、2つの操作からなる群 C_2 を考えます。1枚の紙を、表を上にして机に置きます。表と裏は区別します。操作は、0「何もしない」と、1「紙を裏返

す」の2つだけです。0 はそのまま、1 は表を裏に、裏を表にします。

二つの操作を続けると、次のようになります。

- $0 \circ 0 = 0$ (何もしない→何もしない=何もしないのと同じ)
- $1 \circ 0 = 1$ (何もしない→裏返す=裏返すのと同じ)
- $0 \circ 1 = 1$ (裏返す→何もしない=裏返すのと同じ)
- $1 \circ 1 = 0$ (裏返す→裏返す=何もしないのと同じ)

したがって、 C_2 の計算は次のようになります。

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

図表 8-2 C_2 の演算表

前章で作った商群 D_3/N の計算と並べると、計算の仕組みが同じであることが分かります。

$\circ$	0	1		$\circ$	N	fN
0	0	1	$\leftrightarrow$	N	N	fN
1	1	0		fN	fN	N

図表 8-3 D_3/N と C_2 の演算表の比較

そこで、 $N \mapsto 0, fN \mapsto 1$ と対応させます。すると、 D_3 の6つの要素については、 $e, r, r^2 \mapsto 0, f, rf, r^2f \mapsto 1$ となります。先ほどの図でいえば、距離 a にある3点を0、距離 b にある3点を1に対応させます。

このように、ある集合のどの要素にも、別の集合の要素を一つだけ対応させる決まりを、数学では写像といいます。異なる要素が同じ行き先になってもかまいません。今回の写像を ϕ (ファイ) とすると、 D_3 から C_2 へ対応させることは、 $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ と書きます。「 $\rightarrow$ 」は、どこからどこへ写すかを表します。一つ一つの要素の行き先は、 $e \mapsto 0$ のように「 $\mapsto$ 」で表します。「ファイ、 D_3 から C_2 への写像」と読みます。

式で書くと、 $\phi(e) = \phi(r) = \phi(r^2) = 0$ 、 $\phi(f) = \phi(rf) = \phi(r^2f) = 1$ です。ここで大事なのは、 ϕ の行き先が、 N か fN かだけで決まっていることです。 D_3 の 6 つの要素を 2 つにまとめた商群 D_3/N と、2 つの要素からなる群 C_2 には、同じ計算の仕組みがあることが見えてきました。 D_3 と C_2 の間には、何か関係がありそうです。

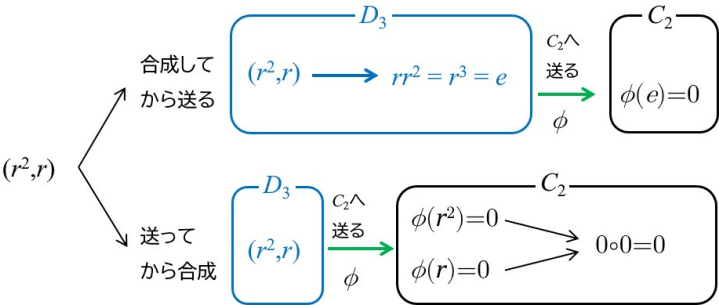
§8.3 準同型

§8.2 では、 D_3 の各要素を C_2 の要素へ送る写像 ϕ を定めました。また、商群 D_3/N と C_2 は、同じ計算の仕組みを持つことも分かりました。しかし、 D_3 の要素を C_2 へ対応させただけでは、この写像が D_3 の合成の仕組みまで保っているかどうかは、まだ分かりません。そこで、二つのやり方を比べます。 D_3 で合成してから C_2 へ送るのと、先に D_3 から C_2 へ送って、そのあと C_2 で合成するのでは、同じ結果になるのでしょうか。確かめてみます。

8.3.1 例 1 先に r^2 、次に r

r^2 と r を、 D_3 で合成してから C_2 へ送る場合と、 C_2 へ送ってから C_2 で合成する場合とを比べます。

先に合成すると、 $rr^2 = r^3 = e$ なので、 $\phi(e) = 0$ です。先に送ると、 $\phi(r^2) = 0$ 、 $\phi(r) = 0$ なので、 $\phi(r) \circ \phi(r^2) = 0 \circ 0 = 0$ です。どちらも 0 です。



図表 8-4 「先に合成」と「先に送る」の比較図

8.3.2 例 2 先に r 、次に f

先に合成すると、 $fr = r^2f$ なので、 $\phi(fr) = \phi(r^2f) = 1$ です。先に送ると、 $\phi(f) = 1$ 、 $\phi(r) = 0$ なので、 $\phi(f) \circ \phi(r) = 1 \circ 0 = 1$ です。同じ 1 になります。

8.3.3 例 3 先に f 、次に f

先に合成すると、 $ff = e$ なので、 $\phi(ff) = \phi(e) = 0$ です。先に送ると、 $\phi(f) = 1$ なので、 $\phi(f) \circ \phi(f) = 1 \circ 1 = 0$ です。同じ 0 になります。

8.3.4 例 4 先に f 、次に r

先に合成すると、 rf なので、 $\phi(rf) = 1$ です。先に送ると、 $\phi(f) = 1$ 、 $\phi(r) = 0$ なので、 $\phi(r) \circ \phi(f) = 0 \circ 1 = 1$ です。同じ 1 になります。

このように、 D_3 で先に動かしてから C_2 へ送っても、先に C_2 へ送ってから C_2 で動かしても、結果は同じでした。 $\phi(g)$ と $\phi(h)$ の値は、 g, h が N と fN

のどちらに属するかだけで決まります。また、前章 (§7.5、問 7-5) で確かめたとおり、 N は正規部分群なので、剰余類どうしの積は代表元の選び方によらず決まります。そのため、 gh がどちらに属するか、つまり $\phi(gh)$ の値も、 g, h の所属だけで決まります。したがって、確かめるべき所属の組合せは 4 通りだけで、例 1～例 4 がその 4 通りにあたります。

8.3.5 準同型

この写像 ϕ のように、「動かしてから送っても、送ってから動かしても、結果が変わらない」写像を準同型といいます。一般に、群 G から群 H への写像 $\phi: G \rightarrow H$ が準同型であるとは、 G のどの二つの要素 g, h についても、 $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ が成り立つことです。

左辺の $\phi(gh)$ は、 G で g と h を合成し、その結果を H へ送ることを表しています。右辺の $\phi(g)\phi(h)$ は、 g と h をそれぞれ H へ送り、 H で合成することを表しています。この二つがいつも同じになることが、準同型の条件です。

§8.4 ショータイムだ！ D_3

ここで、剰余類戦隊 D_3 に登場してもらい、これから説明することを演じてもらいます。

8.4.1 チーム N 、 fN の誕生

司「遊園地 C_2 ランドからヒーローショーの出演依頼が来た。3 人一組で、交互に出演してもらいたい。 e, r, r^2 を基準チームとする」

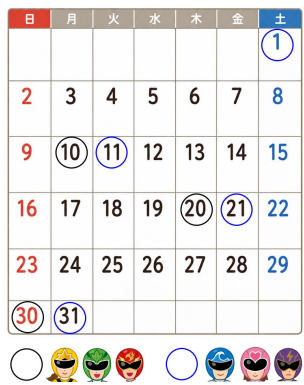
f, rf, r^2f 「私達 3 人は？」

司「 e, r, r^2 を基準に分けると、 f, rf, r^2f は自動的にワンチームだ。 $\{e, r, r^2\}$ をチーム N 、 $\{f, rf, r^2f\}$ をチーム fN と呼ぶことにする」



8.4.2 ショー群を作る

司「出演日は、 N が『末尾が0の日』、 fN が『末尾が1の日』だ。迎えるバスが来る」



f 「バスって、大型観光バスみたいな？」

司「準同型 ϕ 号だ。間違えて他のに乗らないように」

f 「なーんだ」

e 「今の N, fN だと、均等に分けただけに見えます。チームの特徴を出しましょう」

rf 「特徴って？」

e 「演出の仕方では分かれましょう。チーム N は、照明そのまま。チーム fN は反転させる。天井灯が付いていたら消して、スポット。スポットが付いていたら消して、天井灯。チーム名を操作名にしてしまいましょう。そのままにするのが N 、反転させるのが fN 」

r^2 「すると？」

e 「 $N \circ N = N$ 、 $N \circ fN = fN$ 、 $fN \circ N = fN$ 、 $fN \circ fN = N$ 。会場の照明がどうなるか、表で分かるようになります。私達は剰余類戦隊。演算できるのが強み」

司「さすがは e 。お前には、単位元という称号を与えよう」

e 「私にではなく、特徴を持った私達 N, fN に、新たな名前が必要です」

司「商群 D_3/N としよう。これぞ、まさしくショーのためのグループ、ショー群！」

6人「…」

8.4.3 C_2 ランドへ



D_3 では N



ϕ 号に乗ると「0」

今日は「0の日」。 e, r, r^2 たちは、バス ϕ 号に乗車します。彼ら3人は、 D_3 ではチーム N 、グループ分けの基準である正規部分群だと思っていますが、 C_2 では「0さんたち」と呼ばれています。

8.4.4 隠れた「核」

ある日のこと。

司「 ϕ 号で0に送られた者は集まってくれ。君達は様々な呼ばれ方をしているが、さらに、ふさわしい名前を授けよう。 ϕ の核 $\ker \phi$ (ファイの核、カー・ファイ)。どうだ？」

e, r, r^2 「どうって…。そんなチーム名、いつ使うんですか？」

司「大事なことは、すぐには分からないものだよ。諸君」

8.4.5 ヒーローの悩み



また、ある日のこと。

r^2 「ヒーローショーに行きたくありません！」

司「急に、どうした？」

r^2 「私は、ヒーロー r^2 です。それが『0さんたち』ですよ?! なんていうか、

潰されている気分です…」

司「安心しろ。分かる人には分かる」

r^2 「そんな人がどこにいるんですか！ e も r も私も 0 ですよ」

司「やっと『核』の意味が分かる時が来たようだな。 ϕ 号に乗ると、お前たちは『0』だ。しかし、『核』を見れば、お前が、本当は剰余類戦隊チーム N で、 e, r と仲間だということが分かるのだ。『知る人ぞ知る』これこそが本当のヒーローだ。それとも、お前はただの目立ちたがり屋か？」

r^2 「いや、それは…」

司「戦え、 r^2 ！ お前の敵はお前の心だ」

r^2 「はい！ では行って参ります！」

e 「単純ね～」

8.4.6 自然な射影

またまた、ある日。

司「 D_3 の各元は、必ず N か fN のどちらかに所属している。ということで、所属が分かるアプリを作ったぞ。使ってみろ」

r 「私は、 N ですか、 fN ですか」

司「話しかけて使うんじゃない！ アプリの $\pi(\text{---})$ に r と入力するんだ」

$$\pi(r) = N$$

結果



司「名付けて、アプリ名『自然な射影 π 』。なぜかというとな、 D_3 と N が決まった時点で、 r の所属が N であることは自動的に決まるんだ。アプリは表示するだけだ。どうだ、まさに『自然な』だろ？」

r 「紛らわしいんですよ。 π とか ϕ とか」

司「解説しよう。準同型 ϕ 号に乗ると、お前たちはダイレクトに 0 か 1 に運ばれる。また、アプリ π を使えば、まず所属チームが N か fN か分かる。その後、 $N \mapsto 0$ か $fN \mapsto 1$ と読み替えることで、 ϕ 号に乗って 0 か 1 に運ばれたのと同じことになる。例えるなら、乗り換えだ」

r^2f 「何言ってるのかよく分かりませんが、で、今日の指示は？」

司「これだ」



6 人「(文字化けだよ、これじゃ…)」

§8.5 核 (ker) と像 (Im)

§8.3 では、 D_3 から C_2 への準同型写像 ϕ を考えました。 $\phi(e) = \phi(r) = \phi(r^2) = 0$ 、 $\phi(f) = \phi(rf) = \phi(r^2f) = 1$ でした。ここで、 C_2 の 0 は「何もしない」という単位元です。 D_3 のどの元が、この単位元 0 に送られているかというと、 e 、 r 、 r^2 の 3 つです。この 3 つ $\{e, r, r^2\}$ を核と呼びます。

8.5.1 核

準同型写像によって、写した先の単位元に送られる元をすべて集めたものを、その準同型写像の核といいます。核は $\ker$ (カー) を使って表します。今回の準同型写像 ϕ では、 $\ker \phi = \{e, r, r^2\}$ です。 $\ker$ は写像 ϕ に対して「その写像の核」を作る記号です。

$\{e, r, r^2\}$ は、前章で登場した正規部分群 N です。したがって、 $\ker \phi = N$ です。前章で正規部分群として現れた N が、今度は準同型写像の核として現れました。準同型写像 ϕ を通して見ると、 e, r, r^2 はすべて 0 です。 D_3 の中では別々だった3つの操作の違いが、 C_2 へ送ると区別がなくなります。この意味で、核は、準同型写像がどの違いを区別しないのかという指標といえます。

8.5.2 像

今度は、写した先の C_2 を見ます。準同型写像 ϕ によって、 $e, r, r^2 \mapsto 0$ 、 $f, rf, r^2f \mapsto 1$ と送られました。 D_3 の各元が送られた先を集めると、 $\{0, 1\}$ です。この、準同型写像によって送られた先の元をすべて集めたものを、その準同型写像の像といいます。

像は Im (イメージ) を使って表します。今回の準同型写像では、 $\text{Im } \phi = \{0, 1\} = C_2$ です。

今回の準同型写像 ϕ では、 $\ker \phi = N$ 、 $\text{Im } \phi = C_2$ となります。

§8.6 自然な射影

前章では、 $N = \{e, r, r^2\}$ に対して、商群 $D_3/N = \{N, fN\}$ を作りました。

D_3 の各要素は、どちらかの剰余類に入っています。 e, r, r^2 は N に入り、 f, rf, r^2f は fN に入ります。そこで、 D_3 の各要素を、自分が属している剰余類へ送る写像を考えます。 $e, r, r^2 \mapsto N, f, rf, r^2f \mapsto fN$ です。この写像を π (パイ) とすると、 $\pi: D_3 \rightarrow D_3/N$ と書けます。一般には、 $\pi(g) = gN$ です。

この式を確認します。 g として r を選びます。ヒーロー r が §8.4.6 でアプリにした演算です。 $\pi(r) = rN = \{re, rr, rr^2\} = \{r, r^2, e\} = \{e, r, r^2\} = N$ となります。したがって、 $\pi(r) = rN = N$ です。

このように、群の各要素を、その要素が属する剰余類へ送る写像を自然な射影 π といいます。

この写像 π も準同型写像です。 D_3 で合成してから剰余類へ送っても、先にそれぞれの剰余類へ送ってから商群 D_3/N で合成しても、同じ結果になります。実際、前章で定めた剰余類どうしの合成 $(aN) \circ (bN) = (a \circ b)N$ を使うと、 $\pi(gh) = (gh)N = (gN) \circ (hN) = \pi(g) \circ \pi(h)$ です (N が正規部分群なので、この合成は代表元によらず定まります)。 π で商群の単位元 N に送られるのは e, r, r^2 ですから、 $\ker \pi = N$ です。

同じ N なのに、違うの？

$$\ker \pi = \textcircled{N}$$

D_3 の部分集合 (3つの元からなる正規部分群)。 D_3 の住人。

$$\pi(r) = \textcircled{N}$$

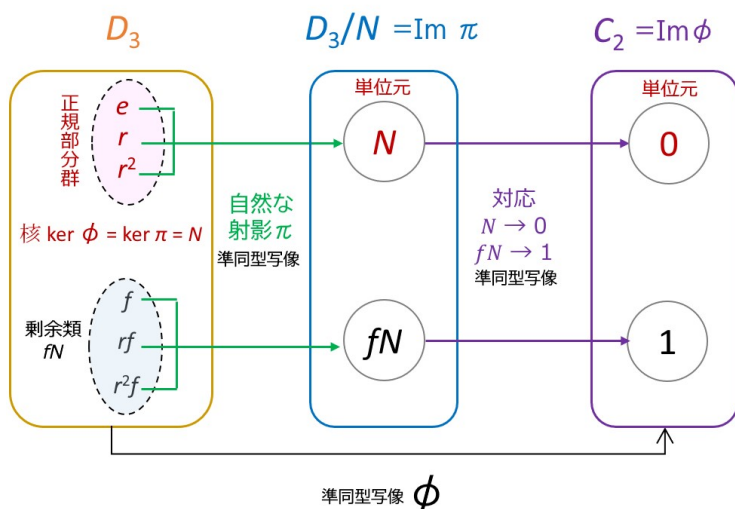
D_3/N の中の1つの元 (単位元)。 D_3/N の住人。

N は、どちらにおいても同じ $\{e, r, r^2\}$ だが、扱われ方が違う。

図表 8-5 自然な射影と核

このことを、復習を兼ねながら確認します。

$\ker \pi$ とは、写像 π に対して「核を取り出さない」という指示です。核は、送り先 D_3/N の単位元 N に送られる元を全部集めたものなので、 $\ker \pi = N$ です。また、 π の送り先の元は N と fN で、これを集めたもの $\{N, fN\}$ は D_3/N です。送り先の元をすべて集めたものは Im なので、 $\text{Im } \pi = D_3/N$ です。



図表 8-6 核と像のまとめ

第8章のまとめ

- 準同型写像とは、群 G から群 H への写像 ϕ で、 $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ を満たすものです。合成してから送っても、送ってから合成しても、結果が同じになります。
- 準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ について、 H の単位元に送られる G の元をすべて集めたものを核といい、 $\ker \phi$ と書きます。核は、準同型によって「どの違いが見えなくなるか」を示す基準です。
- 準同型写像 ϕ によって、実際に到達する元をすべて集めたものを像といい、 $\text{Im } \phi$ と書きます。
- 群 G とその正規部分群 N に対して、各元 g を、その元が属する剰余類 gN に送る写像を自然な射影といいます。 $\pi: G \rightarrow G/N$ 、 $\pi(g) = gN$ と書き、 π も準同型写像です。今回の $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ では、 $\ker \phi = N = \{e, r, r^2\}$ 、 $\text{Im } \phi = C_2$ です。自然な射影 $\pi: D_3 \rightarrow D_3/N$ では、 $\ker \pi = N$ 、 $\text{Im } \pi = D_3/N$ です。

問題

問 8-1

正六角形を 60° 回転させる操作を r とします。回転だけを集めた群 $C_6 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ を考えます ($r^6 = e$ です)。写像 $\phi: C_6 \rightarrow C_2$ を、「回転の回数が偶数なら 0、奇数なら 1」と定めます。つまり、 $\phi(e) = \phi(r^2) = \phi(r^4) = 0$ 、 $\phi(r) = \phi(r^3) = \phi(r^5) = 1$ です。この ϕ は準同型写像です。

- (1) $\phi(r^3 r^2)$ と $\phi(r^3) \circ \phi(r^2)$ を計算してください。両者は一致していますか。
- (2) $\ker \phi$ を求めてください。それが核であると、なぜ言えるのか、根拠を述べてください。
- (3) $\text{Im } \phi$ を求めてください。 C_2 全体になっていますか。確かめて示してください。

問 8-2

$D_3 = \{e, r, r^2, f, rf, r^2 f\}$ 、 $N = \{e, r, r^2\}$ とします。自然な射影 $\pi: D_3 \rightarrow D_3/N$ について、次のことに答えてください。

- (1) $\pi(r)$ を求めてください。なぜその値になるのか、剰余類 rN の中身を計算して示してください。
- (2) $\pi(r^2 f)$ を求めてください。剰余類 $(r^2 f)N$ の中身も具体的に計算し、根拠を示してください。
- (3) $\pi(rf) \circ \pi(f)$ と $\pi(rf \circ f)$ を計算してください。両者は一致していますか。なぜそう言えるのか、 π の性質から説明してください。

解答

8-1

- (1) $r^3 r^2 = r^5$ なので、 $\phi(r^3 r^2) = \phi(r^5) = 1$ です。 $\phi(r^3) \circ \phi(r^2) = 1 \circ 0 = 1$ です。両者は一致します。この計算は、 $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$ という準同型の条件が成り立っている一例です。
- (2) $\ker \phi$ は、 ϕ で C_2 の単位元 0 に送られる元をすべて集めたものです。 0 に送られるのは偶数回の回転 e, r^2, r^4 なので、 $\ker \phi = \{e, r^2, r^4\}$ です。
- (3) $\text{Im } \phi$ は、 ϕ で実際に到達する元をすべて集めたものです。 $\phi(e) = 0$ 、 $\phi(r) = 1$ より 0 にも 1 にも到達するので、 $\text{Im } \phi = \{0, 1\} = C_2$ です。

8-2

- (1) 自然な射影の定義より、 $\pi(r) = rN$ です。 $rN = \{re, rr, rr^2\} = \{r, r^2, e\} = \{e, r, r^2\} = N$ となるので、 $\pi(r) = N$ です。
- (2) 自然な射影の定義より、 $\pi(r^2 f) = (r^2 f)N$ です。 $(r^2 f)N = \{r^2 f, (r^2 f)r, (r^2 f)r^2\} = \{r^2 f, rf, f\} = fN$ なので、 $\pi(r^2 f) = fN$ です。
- (3) $\pi(rf) = fN$ 、 $\pi(f) = fN$ なので、 $\pi(rf) \circ \pi(f) = fN \circ fN = N$ です。
一方、 $rf \circ f = r$ なので、 $\pi(rf \circ f) = \pi(r) = N$ です。両者は一致します。
 π が準同型写像なので、 $\pi(g \circ h) = \pi(g) \circ \pi(h)$ が成り立つからです。