

第9章 準同型定理

第8章の最後に、 D_3/N と $\text{Im } \phi$ が同じ計算の仕組みを持つことにたどり着きました。本章では、これが D_3 だけの話ではないことを確かめます。これが、こままでの到達目標である準同型定理です。

§9.1 核を使えば商群を作れる？

第7章、第8章で行ったことを確認します。

(1) 第7章で商群を作りました。ただし、商群を作れるのは正規部分群で割るときだけでした。

(2) 第8章で、 D_3 から C_2 への準同型写像 ϕ を作りました。

$$\phi(e) = \phi(r) = \phi(r^2) = 0, \phi(f) = \phi(rf) = \phi(r^2f) = 1.$$

そして、核と像を求めました。

$$\ker \phi = \{e, r, r^2\} = N, \text{Im } \phi = \{0, 1\} = C_2.$$

(3) では、どんな準同型写像でも核は正規部分群になるのでしょうか。ここだけ一般の準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ で確かめます。 G, H の単位元をそれぞれ e_G, e_H とします。

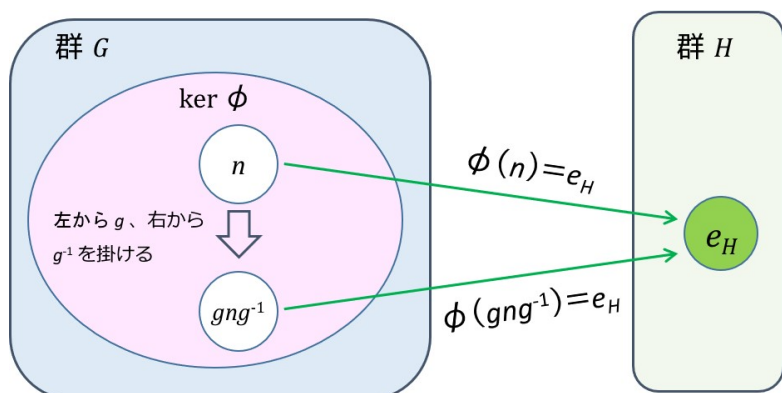
まず、準同型について2つの性質を確認します。1つ目は、単位元は単位元に移ることです。 $\phi(e_G) = \phi(e_G e_G) = \phi(e_G) \phi(e_G)$ なので、両辺の左から $\phi(e_G)^{-1}$ を掛けると、 $\phi(e_G) = e_H$ となります。

2つ目は、逆元は逆元に移ることです。 $\phi(a) \phi(a^{-1}) = \phi(aa^{-1}) = \phi(e_G) = e_H$ なので、 $\phi(a^{-1})$ は $\phi(a)$ の逆元です。したがって、 $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$ となりま

す。

この2つを使って、まず $\ker \phi$ が部分群であることを確かめます。 $\phi(e_G) = e_H$ なので、 $e_G \in \ker \phi$ です。また、 $a, b \in \ker \phi$ なら、 $\phi(a) = \phi(b) = e_H$ です。したがって、 $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = e_H e_H = e_H$ なので、 $ab \in \ker \phi$ です。さらに、 $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1} = e_H^{-1} = e_H$ なので、 $a^{-1} \in \ker \phi$ です。よって、 $\ker \phi$ は G の部分群です。

次に、 $\ker \phi$ が正規部分群であることを確かめます。 $n \in \ker \phi$ と、任意の $g \in G$ を取ると、 $\phi(n) = e_H$ なので、 $\phi(gng^{-1}) = \phi(g)\phi(n)\phi(g^{-1}) = \phi(g)e_H\phi(g)^{-1} = e_H$ となります。したがって、 $gng^{-1} \in \ker \phi$ です。つまり、核の元 n の左から g 、右から g^{-1} を掛けても、結果は再び核の中に入ります。



図表 9-1 核の元 n の左から g 、右から g^{-1} を掛けても、結果は再び核の中に入る

では、この結果を第7章の正規部分群の条件につなげます。第7章では、すべての $g \in G$ について、左から掛けてできる $g \ker \phi$ と、右から掛けてできる $(\ker \phi)g$ が一致すれば、正規部分群だと確認しました。いま得られた $gng^{-1} \in \ker \phi$ を使って、この2つが一致することを示します。

二つの集合が等しいことは、互いに含まれる ($\subseteq$ と $\supseteq$) ことを示して確かめ

ます。

まず、 $g \ker \phi \subseteq (\ker \phi)g$ を示します。 $g \ker \phi$ の任意の元を1つ取ります。この元は、ある $n \in \ker \phi$ を使って gn と書けます。 gn が $(\ker \phi)g$ に入ることを示すために、式の見方を2つ切り替えます。

1つ目は、 gn という積の分解のしかたです。ふつう gn という式を見たら「 g に n を掛けた」と読みます。ここでは、 gn を「 $\ker \phi$ の元と g の積」という形に直したいので、次の等式に注目します。

$$gn = (gng^{-1})g$$

この等式は、次のように確かめられます。

$$(gng^{-1})g = gn(g^{-1}g) = gne_G = gn$$

です。最初の等号では結合則を使い、次に $g^{-1}g = e_G$ 、最後に単位元の性質を使っています。

したがって、 gn は、 $gn = (gng^{-1})g$ と書き換えることができます。見方としては、「 g に n を掛けた」から、「 gng^{-1} に g を掛けた」へ変わっています。

2つ目は、 gng^{-1} をひとかたまりの元と見ることです。 gng^{-1} は3つの元の積ですが、前段落の結果から $gng^{-1} \in \ker \phi$ なので、これは $\ker \phi$ の元1つです。すると $gn = (gng^{-1}) \cdot g$ は「 $\ker \phi$ の元と g の積」の形になります。 $(\ker \phi)g$ の定義は「 $\ker \phi$ の元と g の積を集めたもの」なので、 $gn \in (\ker \phi)g$ です。

したがって、 $g \ker \phi$ のどの元も $(\ker \phi)g$ に入るので、 $g \ker \phi \subseteq (\ker \phi)g$ です。

逆向きも同じ考え方で示します。 $(\ker \phi)g$ の任意の元は、ある $n \in \ker \phi$ を使って ng と書けます。ここでも ng の見方を切り替えます。 $ng = g \cdot (g^{-1}ng)$ と分解し、 $g^{-1}ng$ をひとかたまりと見ます。前段落の結果を g の代わりに g^{-1} に対して使うと、 $g^{-1}ng \in \ker \phi$ です。そこで $m = g^{-1}ng$ とおけば $m \in \ker \phi$ で

あり、 $ng = gm \in g \ker \phi$ となります。したがって、 $(\ker \phi)g \subseteq g \ker \phi$ です。

g は G のどの元でもよかったので、すべての $g \in G$ について $g \ker \phi = (\ker \phi)g$ となります。これは第7章で確認した正規部分群の条件そのものです。つまり、 $\ker \phi$ は正規部分群です。

(1)～(3)を合わせると、準同型写像 ϕ の核 $\ker \phi$ で群を割れば、商群を作ることができると言えます。確認します。

$\ker \phi = N$ なので、作られる商群は $D_3 / \ker \phi = D_3 / N = \{N, fN\}$ です。中身を書くと、 $N = \{e, r, r^2\}$ 、 $fN = \{f, rf, r^2f\}$ です。演算は第7章で調べたとおり、 $N \circ N = N$ 、 $N \circ fN = fN$ 、 $fN \circ N = fN$ 、 $fN \circ fN = N$ となります。

§9.2 「0」に来たのは、どのチーム？

「0」として同じ扱いを受けている e, r, r^2 を、 C_2 ランドのスタッフ目線で見てみましょう。

e, r, r^2 は、どこから来たのでしょうか。チーム N です。同じように、1へ来た f, rf, r^2f は、チーム fN です。式で書くと、 $N = \{e, r, r^2\} \rightarrow 0$ 、 $fN = \{f, rf, r^2f\} \rightarrow 1$ となります。

まず、 $e, r, r^2 \rightarrow 0$ を見ていきます。たとえば $g = e$ 、 $h = r$ とすると、 $\phi(e) = \phi(r) = 0$ です。一方、 $e^{-1}r = r$ であり、 r は $\ker \phi = N = \{e, r, r^2\}$ に入っています。同じことは、 e と r^2 、 r と r^2 についても成り立ちます。

つまり、「 ϕ で同じところへ行く2つの元は、核で作った同じ剰余類に入っている」...①になっています。

では、同じことが一般の g, h でも成り立つのでしょうか。

「 ϕ で同じところへ行くもの」を式で表すと、 $\phi(g) = \phi(h)$...②です。②が成り立つなら、§9.1(3) で確認した「逆元も逆元へ送られる」という性質から、 $\phi(g^{-1})$ は $\phi(g)$ の逆元です。さらに②より、 $\phi(h) = \phi(g)$ なので、 $\phi(g^{-1}h) = \phi(g^{-1})\phi(h) = \phi(g)^{-1}\phi(g) = e_H$ となります。

つまり、 $g^{-1}h \in \ker \phi$ です。

逆に、 $g^{-1}h \in \ker \phi$ なら、 $\phi(g^{-1}h) = e_H$ です。したがって、 $\phi(g)^{-1}\phi(h) = e_H$ となり、両辺の左から $\phi(g)$ を掛けると、 $\phi(h) = \phi(g)$ です。

以上から、 $\phi(g) = \phi(h) \iff g^{-1}h \in \ker \phi$...③となります。

§5.6 では、2つの元 g, h が同じ左剰余類にいるのは、 $g^{-1}h$ がその部分群に入るときだと確認しました。今回は、その部分群が $\ker \phi$ です。

したがって、 $g^{-1}h \in \ker \phi$ であることと、 g と h が核による同じ剰余類にいることは同じです。

③と合わせると、 $\phi(g) = \phi(h)$ であることと、 g と h が核による同じ剰余類にいることは、同じことだと分かりました。

ヒーローたちで例えると、次のようになります。

C_2 ランドで同じ「0」として扱われるヒーローたちは、出発前から核による同じチームに入っていました。そして、核による同じチームにいたヒーローは、 ϕ で送ると同じ場所へ着きます。

つまり、 ϕ が同じものとして見るチームと、核によって分けたチームは、ぴったり一致しています。

9.2.1 計算の仕組みまで同じか

$\circ$	N	fN
N	N	fN
fN	fN	N

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

図表 9-2 左: $D_3/\ker \phi$ の演算表、右: $\text{Im } \phi$ の演算表

$N \longleftrightarrow 0$ 、 $fN \longleftrightarrow 1$ と読み替えると、2つの表は完全に一致します。名前が違っただけで、計算の仕組みは同じです。

§9.3 準同型定理

ここまでで、「 $D_3/\ker \phi$ と $\text{Im } \phi$ は、元が一一に対応し、計算の仕組みも同じである」...④が分かりました。このような関係に、名前を付けます。

2つの群の元が全部一一に対応し、しかも計算の仕組みまで同じであるとき、この2つの群は同型であるといい、同型を表す記号 $\cong$ で結びます。「計算の仕組みまで同じ」とは、その対応を σ (シグマ) と書くと、どの2つの元 a, b についても $\sigma(a \circ b) = \sigma(a) \circ \sigma(b)$ が成り立つことです。いまの例では $\sigma(N) = 0$ 、 $\sigma(fN) = 1$ という対応で、図表 9-2 の2つの表がこの式のとおりに一致しています。

したがって、④は $D_3/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ (「 $D_3/\ker \phi$ と $\text{Im } \phi$ は同型である」と読む) と書くことができます。

すると、「これは D_3 だけの現象だろうか。一般にはどうだろう」という問いが浮かびます。

なお、準同型写像の像 $\text{Im } \phi$ は、行き先の群の中で、それ自身も群になります**1。ですから、一般の場合にも $G/\ker \phi$ と $\text{Im } \phi$ を2つの群として比べることができます。

****1** §9.1(3) で確認したことを使えば分かります。像の元 $\phi(a), \phi(b)$ を合成すると、 $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$ も像に入ります。また、 $e_H = \phi(e_G)$ も像に入り、 $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$ も像に入ります。

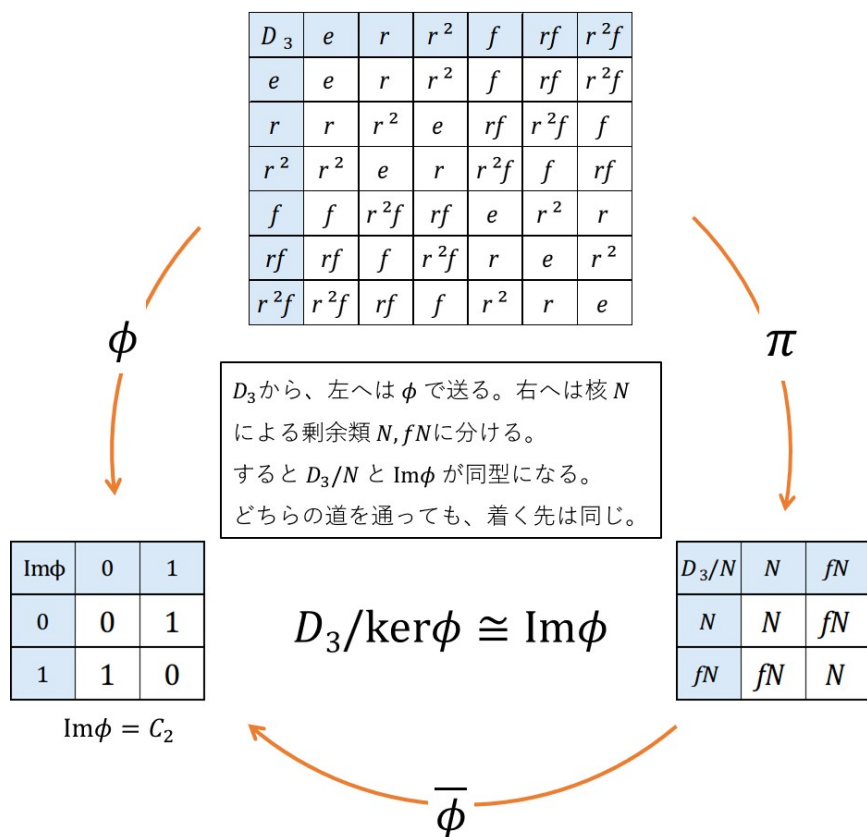
実は、一般に、次が成り立ちます。群の準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ に対して、

$$G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$$

これを、準同型定理といいます。証明は、問 9-1 で行います。

準同型定理を言葉にすると、「 ϕ が区別しないものを、核を使って最初から同じものとしてまとめてしまえば、残った商群は、 ϕ で実際に見えている像と、ぴったり同じ構造になる」ということです。

第4章では、人が「同じ仲間」の線を引きました。第5章では、その線を引く数学的な根拠が剰余類として与えられ、第7章では剰余類を元として計算する商群を作り、第8章では準同型写像によって同じものとして扱われる元を核として捉えました。そして本章で、それらがこの一本の式にまとまりました。



図表 9-3 準同型写像と商群を経由する経路

D_3 から $\text{Im}\phi$ へ着く経路を表しています。左は ϕ で直接送る道、右は自然な射影 π で剰余類に分けてから $\bar{\phi}$ (ファイバー) で送る道です。 $\bar{\phi}$ は剰余類 gN を受け取って、その代表元 g の行き先 $\phi(g)$ を答える対応で、式で書くと $\bar{\phi}(gN) = \phi(g)$ です。この $\bar{\phi}$ が対応として本当にきちんと定まるか、そして計算の仕組みまで保つかは、問 9-1 で確かめます。この図は D_3 の場合です。一般の群 G でも同じ形で $G/\ker\phi \cong \text{Im}\phi$ が成り立ちます。

9.3.1 問 8-1 で確認した例

問 8-1 では、 C_6 から C_2 への準同型について、 $\ker \phi = \{e, r^2, r^4\}$ 、 $\text{Im } \phi = C_2$ を求めました。ここでの ϕ は、問 8-1 で使った写像です。ここで $K = \ker \phi$ とすると、§9.1 で確認したように K は正規部分群なので、商群を作ることができます。 $C_6/K = \{K, rK\}$ となり、 $K \leftrightarrow 0$ 、 $rK \leftrightarrow 1$ と対応させると、計算の仕組みは C_2 と同じになります。つまり、問 8-1 で調べた準同型でも、 $C_6/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ となります。

§9.4 「像」はどこにある？

準同型定理は $G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ でした。第 8 章で、この右辺 $\text{Im } \phi$ を「像」と呼ぶことを確認しました。ところで、この像はどこにあるのでしょうか。今回の ϕ では、像は C_2 全体でした。では、像はいつも行き先として用意された集合全体になるのでしょうか。

ここでは、 $C_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ という群を使います。 C_4 では、数字を足したあと、4 で割った余りをその値とします。これを「mod4 の加法」****2** といいます。

****2** これについての具体的な計算の練習は、第 10 章の問 10-1 で行います。

この C_4 を行き先として、写像 $\psi: D_3 \rightarrow C_4$ ****3** を考えます。 e, r, r^2 を 0 へ、 f, rf, r^2f を 2 へ送る写像で、 ψ はブサイと読みます。

****3** これが本当に準同型写像になっているか、第 10 章の問 10-4 で確かめます。

ヒーローたちにもう一度登場してもらい、像がどこにあるかを探してみます。

9.4.1 サイン会だ、 D_3 !

新たな任務

ヒーローたちに、 C_2 ランド横のホテル C_4 からサイン会の依頼が来ました。

司「また2チームに分かれて行ってほしい。 e, r, r^2 は0のつく日、 f, rf, r^2f は2のつく日だ。 ψ 号が迎えに来る」

r^2 「また『0』になれと？」

司「行き先が違えば、別の任務だ」

f 「今度は、私たちは『2』さん？」

司「すごいぞ。楽屋が4つもあるんだ」

e 「全部使っていいんですか？」

司「入るのは『0様』と書かれた部屋だけだそうだ」

r^2 「やっぱり『0』じゃん！」

ψ 号にて



r^2 「俺はヒーローなのに。サイン会って……。俺の人生は終わった……」

e 「仕方ないでしょ。私たちの行き先をなんて言うか、知らないの？」

r 「ホテル C_4 でしょ？」

e 「終域。わかった？ 終域。大事なことから2回言いました」

r「本当に、終わってるなあ」



C_4 につくと、0 さんたちは楽屋に案内されました。そこには、部屋が4つありました。

r「ここは、どこ？」

e「だから、終域だって教えたでしょ！」

r²「嫌だー、心が潰されるー！」

r「落ち着けて。ほら、『2 様』という部屋もあるよ。f たちの部屋だね」

像

そのころ、ホテルのスタッフはサイン会の準備をしていました。

支配人「そろそろ、0 様たちを呼んできて」

スタッフ「どこにいるんですか？」

支配人「『像』にいる」

スタッフ「像？」

支配人「0 様と 2 様が到着する部屋。まとめて『像』って呼ぶ」

スタッフ「あそこ、一番奥だから『終域』って言うのじゃなかったんですか？」

支配人「準備した部屋が『終域』。実際に入る部屋は、全部をまとめて『像』と呼ぶ」

写像の、行き先として用意された集合を「終域」といいます。出発の集合が A 、行き先として用意された集合が B なら、 B が終域です。では、終域と像 ($\text{Im } \psi$) は、どう違うのでしょうか。

今回の $\psi: D_3 \rightarrow C_4$ では、 e, r, r^2 が 0 へ、 f, rf, r^2f が 2 へ行きます。すると、終域は $C_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ ですが、実際に到達するのは $\text{Im } \psi = \{0, 2\}$ だけです。1 と 3 には、対応するヒーローが誰もいません。第 10 章で、この ψ が準同型写像になっていることを確認すれば、準同型定理から、商群 $D_3 / \ker \psi$ と一対一に対応する相手は C_4 全体ではなく、 $\{0, 2\} = \text{Im } \psi$ だと分かります。

つまり、準同型定理では、終域は「行き先として用意した箱」、像は「実際に到達した元を集めたもの」で、商群と対応するのは像です。終域と像をはっきり区別する必要があります。

第 9 章のまとめ

- 準同型写像の核は正規部分群なので、 $\ker \phi$ で割って商群 $G / \ker \phi$ を作ることができる。
- ϕ で同じところへ行く元は、ちょうど核による同じ剰余類に入っている。だから剰余類と像の元が一対一に対応する。対応させると計算の仕組みまで一致する。この関係を同型といい、 $\cong$ で書く。
- 一般に $G / \ker \phi \cong \text{Im } \phi$ が成り立つ。これを準同型定理という。右辺は終域ではなく、像 ($\text{Im } \phi$) であることに注意する。

問題

答えるときは、根拠となる性質や定義を示し、必要な計算も書いてください。

問 9-1

群 G 、 H と準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ について、 $N = \ker \phi$ とします。 H の単位元を e_H とします。次の対応を考えます。

$$\bar{\phi}: G/N \rightarrow \text{Im } \phi, \quad \bar{\phi}(gN) = \phi(g)$$

これは、剰余類 gN を受け取って、その代表元 g の行き先を答える対応です。

1. $gN = hN$ から、 $\phi(g) = \phi(h)$ を示してください。

2. $\bar{\phi}((gN)(hN)) = \bar{\phi}(gN)\bar{\phi}(hN)$ を示してください。

3. $\bar{\phi}(gN) = \bar{\phi}(hN)$ から、 $gN = hN$ を示してください。剰余類の判定を使ってください。

4. $\text{Im } \phi$ の元を 1 つ取り、その元に送られる G/N の剰余類を示してください。

5. (1)～(4) により、 G/N と $\text{Im } \phi$ について何が言えますか。

問 9-2

準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ について、核がいちばん小さい場合と、いちばん大きい場合を考えます。 G, H の単位元をそれぞれ e_G, e_H とします。

1. $\ker \phi = \{e_G\}$ の場合、 $G/\ker \phi$ は G とどのような関係になりますか。準同型定理から、 G と $\text{Im } \phi$ の関係を答えてください。

2. $\ker \phi = G$ の場合、 $\text{Im } \phi$ と $G/\ker \phi$ を求めてください。両者はどのような関係になりますか。

解答

9-1 準同型定理を一般に確かめます。§9.1 までに用意した道具だけで示せます。

1. 代表元を変えても値が変わらないことを確かめます。 $gN = hN$ なので、剰余類の判定 (§5.6) より、 $g^{-1}h \in N = \ker \phi$ です。したがって、 $\phi(g^{-1}h) = e_H$ となります。 N は $\ker \phi$ だからです。 ϕ は準同型写像なので、 $\phi(g^{-1}h) = \phi(g^{-1})\phi(h)$ です。さらに、§9.1(3) より、 $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ なので、 $\phi(g)^{-1}\phi(h) = e_H$ となります。両辺に左から $\phi(g)$ を掛けると、 $\phi(h) = \phi(g)$ です。したがって、 $gN = hN$ なら、どちらの代表元を選んでも $\bar{\phi}$ の値は同じになります。これで、同じ剰余類のどの代表元を選んでも $\bar{\phi}$ の値が変わらないことが確認できました。これが、 $\bar{\phi}$ が well-defined である、ということです。

2. 計算を保つことを確かめます。商群の演算から、 $(gN)(hN) = (gh)N$ です。したがって、 $\bar{\phi}((gN)(hN)) = \bar{\phi}((gh)N) = \phi(gh)$ となります。一方、 $\bar{\phi}(gN)\bar{\phi}(hN) = \phi(g)\phi(h)$ です。 ϕ は準同型写像なので、 $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ が成り立ちます。したがって、 $\bar{\phi}((gN)(hN)) = \bar{\phi}(gN)\bar{\phi}(hN)$ です。両者が一致するのは、商群では $(gN)(hN) = (gh)N$ と計算し、さらに ϕ が計算を保つ準同型写像だからです。

3. 違う剰余類は違うところへ行くことを確かめます。 $\bar{\phi}(gN) = \bar{\phi}(hN)$ とすると、 $\phi(g) = \phi(h)$ です。 $\bar{\phi}(gN) = \phi(g)$ 、 $\bar{\phi}(hN) = \phi(h)$ だからです。両辺に左から $\phi(g)^{-1}$ を掛けると、 $e_H = \phi(g)^{-1}\phi(h)$ となります。§9.1(3) より、 $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1})$ なので、 $e_H = \phi(g^{-1})\phi(h) = \phi(g^{-1}h)$ です。したがって、 $g^{-1}h \in \ker \phi = N$ となります。これは、 $gN = hN$ ということです。剰余類の判定で、 $g^{-1}h \in N$ なら g と h は N による同じ剰余類に入るか

らです。したがって、行き先が同じなら、もともと同じ剰余類だったことになります。つまり、違う剰余類が同じところへ潰れることはありません。

4. 像の元には全部到達することを確かめます。 $\text{Im } \phi$ の元を1つ取ります。

像の定義から、その元は、ある $g \in G$ を使って $\phi(g)$ と書けます。一方、 $\bar{\phi}(gN) = \phi(g)$ なので、その元には剰余類 gN から到達します。したがって、 $\text{Im } \phi$ のどの元にも、送られてくる剰余類があります。

5. (1)~(4) により、 G/N と $\text{Im } \phi$ は、元が一一に対応し、計算の仕組みも同じです。したがって、 G/N と $\text{Im } \phi$ は同型です。 $N = \ker \phi$ なので、 $G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ が言えます。これが準同型定理です。

なお、(1) で確かめたことは、第7章で商群の演算について確かめたことと同じ形をしています。第7章では、「同じ剰余類の中からどの代表元を選んでも、答えが同じ剰余類になる」ことを確かめました。今回は、「同じ剰余類の中からどの代表元を選んでも、 $\bar{\phi}$ の行き先が変わらない」ことを確かめました。どちらも well-defined の話です。剰余類の代表元を使って演算や写像を定めるときは、いつもこの確認が必要になります。

9-2 準同型定理が、(1) 核が単位元だけの場合、(2) 核が群全体の場合にも成り立つことを確認します。

1. $\ker \phi = \{e_G\}$ の場合、 $G/\{e_G\}$ の剰余類は $g\{e_G\} = \{g\}$ なので、 G の各元がそれぞれ1個だけを含む別々の剰余類になります。対応 $g \mapsto \{g\}$ は元を一対一に対応させます。また $\{g\}\{h\} = \{gh\}$ なので、計算の仕組みも同じです。したがって、 $G \cong G/\ker \phi$ です。問7-4で $D_3/\{e\}$ について見た場合と同じです。一方、準同型定理から、 $G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ です。この2つの対応を続けてたどると、 $g \mapsto \{g\} \mapsto \bar{\phi}(\{g\}) = \phi(g)$ となります。つまり、 ϕ そのものが G から $\text{Im } \phi$ への対応になっています。どち

らの段も元を一対一に対応させるので、続けてたどっても一対一です。さらに $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ なので、計算の仕組みも同じです。したがって、 $G \cong \text{Im } \phi$ となります。この場合、核に入っているのは単位元 e_G だけなので、 ϕ によって違う元が同じものとしてまとめられることはありません。 G の計算の仕組みがそのまま像に残っています。

2. $\ker \phi = G$ の場合、 G のすべての元が e_H に送られます。したがって、 $\text{Im } \phi = \{e_H\}$ です。一方、 $G/\ker \phi = G/G = \{G\}$ です。 $\text{Im } \phi$ も $G/\ker \phi$ も、元が1個の群ですから、 $G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ となります。この場合は、 G のすべての元が核に入っているので、すべての違いが1つにまとめられています。

核に入る元が少なければ、まとめられる元も少なくなります。核に入る元が多ければ、より多くの元が一つにまとめられます。準同型定理は、核が単位元だけの場合から群全体の場合まで成り立っています。