

第 10 章 確認問題 2

答えるときは、根拠となる性質や定義を示し、必要な計算も書いてください。

。は適宜省略していますが、必要なときは書いています。「あとから行う操作を左に書く」ことに変更はありません。

準備 mod (モッド) と C_n の加法

- 「 $\text{mod } n$ 」とは、「 n で割った余りだけを見る」という意味です。このとき n を「法」といいます。たとえば、7 を 3 で割ると余りは 1 なので、 $7 \equiv 1 \pmod{3}$ と書き、「7 と 1 は 3 を法として合同」と読みます。
- 第 8 章では $C_6 = \{e, r, \dots, r^5\}$ のように回転の記号で書きましたが、この章では C_n を $\{0, 1, \dots, n-1\}$ で表します。普通に足したあと、その和を n で割った余りを答えとする加法を考えます。たとえば、 $C_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ では、 $3 + 2 = 5$ と普通に足したあと、5 を 4 で割った余り 1 を答えとします。したがって、 C_4 では $3 + 2 = 1$ です。この演算を $\text{mod } n$ の加法とし、 $+$ で書きます。
- 第 8 章の $C_2 = \{0, 1\}$ の演算 $\circ$ ($1 \circ 1 = 0$ など) は、 $\text{mod } 2$ の加法と同じ計算です。この章では、 C_2 の演算も $+$ で書きます。

問題

問 10-1

次の加法を計算してください。

- (1) C_4 で $2 + 2$
- (2) C_4 で $3 + 3$

問 10-2

$C_9 = \{0, 1, \dots, 8\}$ (mod 9 の加法)、 $C_3 = \{0, 1, 2\}$ (mod 3 の加法) とします。上の準備と同じ要領で、 C_9 では 9 で割った余りを、 C_3 では 3 で割った余りを答えにします。たとえば C_9 では $7 + 5 = 12 \equiv 3 \pmod{9}$ です。

写像 $\phi: C_9 \rightarrow C_3$ 、 $\phi(x) = x$ を 3 で割った余り を考えます。

なお、 $\phi(x+y)$ の $+$ は C_9 の加法、 $\phi(x) + \phi(y)$ の $+$ は C_3 の加法です。同じ記号ですが、別の群の演算です。

- (1) $\phi(7+5)$ と $\phi(7) + \phi(5)$ を計算してください。さらに、一般の $x, y \in C_9$ について $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ を示してください。「3 で割った余り」という ϕ の定義を使ってください。
- (2) $\ker \phi$ を求めてください。
- (3) $C_9 / \ker \phi$ の異なる剰余類をすべて書き、演算表を作ってください。
- (4) $\text{Im } \phi$ を求め、 $C_9 / \ker \phi$ との対応を示してください。また、 $|C_9|$ 、 $|\ker \phi|$ 、 $|\text{Im } \phi|$ を求め、このことから何が言えますか。

問 10-3

C_9 を、 $\ker \phi$ とは違う分け方で 3 組に分けてみます。

$$X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}, Z = \{6, 7, 8\}$$

これも 9 個を 3 個ずつに分けています。

組どうしの計算を、次のように決めてみます。「それぞれの組から代表元を 1 つ選んで足し、その答えが入る組を、組どうしの計算の答えとする」。この決め方がうまくいくかを調べます。

- (1) X は C_9 の部分群ですか。閉じているかどうかから示してください。
- (2) X から 0 と 0 を選んで $0+0$ を、2 と 2 を選んで $2+2$ を計算してください。それぞれの結果は X, Y, Z のどこに入りますか。この結果から、上の決め方で「 X と X の計算」の答えを 1 つに定められるか答えてください。
- (3) 今回の失敗と、第 7 章で扱った $H = \{e, f\}$ の失敗の違いを説明してください。

問 10-4

§9.4 では、写像 $\psi: D_3 \rightarrow C_4$ を、 $\psi(e) = \psi(r) = \psi(r^2) = 0$ 、 $\psi(f) = \psi(rf) = \psi(r^2f) = 2$ と定めました。これが本当に準同型写像になっているかを、ここで確かめます。 C_4 の加法は、本章冒頭の準備を参照してください。

- (1) g, h がそれぞれ $N = \{e, r, r^2\}$ と fN のどちらに属するかで 4 通りに分け、 gh の所属、 $\psi(gh)$ 、 $\psi(g) + \psi(h)$ を表にし、4 通りすべてで両者が一致することを示してください。
- (2) $\ker \psi$ と $\text{Im } \psi$ を求めてください。 C_4 のどの元には届いていませんか。
- (3) 準同型定理を使って、 $D_3 / \ker \psi$ と同型になる群を答えてください。また、 $|\ker \psi|$ と $|\text{Im } \psi|$ を使って $|D_3| = 6$ を掛け算で表し、 $|C_4| = 4$ を使った場

合と比べてください。

- (4) f を 1 へ送る準同型写像 $\theta: D_3 \rightarrow C_4$ は作れますか。 $f \circ f = e$ を使って示してください。

問 10-5

D_3 の 6 つの要素を、3 桁の符号で表すことにします。

$$e = 000, r = 001, r^2 = 010, f = 100, rf = 101, r^2f = 110$$

この 3 桁は D_3 の要素につけた符号であり、2 進数として足したりビット演算をしたりするものではありません。演算はこれまでどおり D_3 の演算で行います。右 2 桁は、回転の部分が e, r, r^2 のどれかを表します。3 通りなら 00, 01, 10 で足りるので、11 は使いません。

- (1) 次の合成を計算してください。 D_3 の元で答えを出したあと、3 桁の符号に戻してください。

① $001 \circ 010 (= r \circ r^2)$ ② $010 \circ 100 (= r^2 \circ f)$

③ $100 \circ 001 (= f \circ r)$ ④ $101 \circ 101 (= rf \circ rf)$

- (2) (1) ①～④について、今度は一番左の桁だけを見てください。

- ① 合成した 2 つの符号について、一番左の桁だけを書いてください。答えの一番左の桁も書いてください。

- ② ①の結果から、2 つの符号の一番左の桁がそれぞれ 0, 0 / 0, 1 / 1, 0 / 1, 1 のとき、答えの一番左の桁がどうなるかを、規則としてまとめてください。

- ③ この 4 通りは、どの群の演算表と同じですか。また、4 例だけでなくすべての合成で同じ規則が成り立つことを、問 10-4(1) の表を使って説明してください。

ヒント：一番左の桁が 0 の e, r, r^2 はすべて回転、1 の f, rf, r^2f はすべ

て鏡映を含む操作です。§7.3 で見た N と fN です。

- (3) 今度は反対に、一番左の桁を捨てて、右 2 桁だけで計算できるか調べます。

① $001 \circ 001$ と $101 \circ 101$ を計算し、それぞれ答えの右 2 桁を書いて、比べてください。合成する 2 つの符号の右 2 桁は、どちらも 01, 01 です。

② 右 2 桁だけを使った「計算」を 1 つに決められるか教えてください。

- (4) 一番左の桁が同じ要素どうしをまとめると、 $A_0 = \{000, 001, 010\}$ 、 $A_1 = \{100, 101, 110\}$ の 2 組になります。右 2 桁が同じ要素どうしをまとめると、 $B_{00} = \{000, 100\}$ 、 $B_{01} = \{001, 101\}$ 、 $B_{10} = \{010, 110\}$ の 3 組になります。

① A_0 は $N = \{e, r, r^2\}$ と一致していますか。 A_1 は N によるどの剰余類ですか。中身を書き直して確かめてください。

② B_{00} は $H = \{e, f\}$ と一致していますか。 rH と r^2H を計算し、 B_{01} 、 B_{10} と比べてください。

③ 右剰余類 Hr を計算して rH と比べ、 $H = \{e, f\}$ が正規部分群かどうか教えてください。第 7 章で見た左剰余類・右剰余類の判定を使ってください。

- (5) 3 桁の符号の一番左の桁を答える写像 $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ を考えます。同じ ϕ という文字を使いますが、問 10-2 の $\phi: C_9 \rightarrow C_3$ とは別の写像です。

① $\phi(000)$ 、 $\phi(001)$ 、 $\phi(010)$ 、 $\phi(100)$ 、 $\phi(101)$ 、 $\phi(110)$ を書いてください。この写像は、第 8 章で作った $D_3 \rightarrow C_2$ の写像と同じですか。また、 $\ker \phi$ と $\text{Im } \phi$ を求めてください。 $\ker \phi$ は 3 桁の符号ではどの組にあたりますか。

② 準同型定理を使って、 $D_3 / \ker \phi$ と同型になる群を教えてください。

③ 問 10-5 の、(2) と (3) の違いを、核・正規部分群・準同型を使って説明してください。

解答

10-1

- (1) 0 (2) 2

10-2

- (1) $\phi(7+5) = \phi(3) = 0$ です。 $\phi(7) + \phi(5) = 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$ です。

両者は一致します。

次に、一般の $x, y \in C_9$ について考えます。 $\phi(x) = r$ 、 $\phi(y) = s$ とすると、 ϕ の定義から $x = 3a + r$ 、 $y = 3b + s$ と書けます。ただし、 a, b は整数です。したがって、整数としての和について $x + y = 3(a + b) + (r + s)$ となります。よって、整数 $x + y$ を 3 で割った余りは、 $r + s$ を 3 で割った余りに等しくなります。これは C_3 での $r + s$ 、つまり $\phi(x) + \phi(y)$ です。一方、 C_9 での $x + y$ は、この整数の和から 9 の倍数を引いて 0~8 に戻したものです。9 は 3 の倍数なので、この操作では 3 で割った余りは変わりません。したがって、 $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ が成り立ちます。つまり、 ϕ は準同型写像です。

- (2) C_3 の単位元は 0 です。 $\phi(x) = 0$ となるのは $x = 0, 3, 6$ なので、 $\ker \phi = \{0, 3, 6\}$ です。核は、準同型によって行き先の単位元に送られる元を全部集めたものです。

- (3) 核 $K = \{0, 3, 6\}$ とすると、 $C_9/K = \{K, 1 + K, 2 + K\}$ です。中身は、 $K = \{0, 3, 6\}$ 、 $1 + K = \{1, 4, 7\}$ 、 $2 + K = \{2, 5, 8\}$ です。この 3 つで C_9 の 9 個の元が重なりなく全部入っているため、異なる剰余類はこの 3 つです。演算表は次のとおりです。

+	K	$1+K$	$2+K$
K	K	$1+K$	$2+K$
$1+K$	$1+K$	$2+K$	K
$2+K$	$2+K$	K	$1+K$

- (4) ϕ の値として $0, 1, 2$ がすべて現れるので、 $\text{Im } \phi = \{0, 1, 2\} = C_3$ です。 C_3 の演算表は次のとおりです。

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

ここで、 $K \leftrightarrow 0$ 、 $1+K \leftrightarrow 1$ 、 $2+K \leftrightarrow 2$ と対応させると、2つの表は完全に一致します。したがって、 $C_9/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ です。第9章の準同型定理と同じ形になっています。

それぞれの元の数、 $|C_9| = 9$ 、 $|\ker \phi| = 3$ 、 $|\text{Im } \phi| = 3$ です。よって、 $9 = 3 \times 3$ となり、 $|C_9| = |\ker \phi| \times |\text{Im } \phi|$ が言えます。

第8章で作った $D_3 \rightarrow C_2$ では $6 = 3 \times 2$ と数えられ、問8-1の $C_6 \rightarrow C_2$ でも $6 = 3 \times 2$ と数えられます。どちらも第9章で準同型定理を確かめた例です。今回は $9 = 3 \times 3$ です。答えが C_2 にならない場合でも、同じ仕組みが成り立っています。

補足 この ϕ は数独を塗り分ける操作でもある

C_9 の足し算の表は、行の並びだけを $0, 3, 6 \mid 1, 4, 7 \mid 2, 5, 8$ の順にして、列は $0, 1, \dots, 8$ のままにし、数字と要素を次のように対応させることができます。

数字	1	4	7	2	5	8	3	6	9
要素	0	1	2	3	4	5	6	7	8

図表 10-1 数字と要素の対応

この対応を使うと、次の完成数独になります。

1	4	7	2	5	8	3	6	9
2	5	8	3	6	9	1	4	7
3	6	9	1	4	7	2	5	8
4	7	2	5	8	3	6	9	1
5	8	3	6	9	1	4	7	2
6	9	1	4	7	2	5	8	3
7	2	5	8	3	6	9	1	4
8	3	6	9	1	4	7	2	5
9	1	4	7	2	5	8	3	6

図表 10-2 完成数独

行にも列にも 3×3 ブロックにも、1 から 9 が 1 回ずつ現れています。この対応では、数字 $\{1, 2, 3\}$ が要素 $\{0, 3, 6\} = \ker \phi$ に、 $\{4, 5, 6\}$ が $\{1, 4, 7\}$ に、 $\{7, 8, 9\}$ が $\{2, 5, 8\}$ に対応します。つまり ϕ は、この数独を $1, 2, 3 \rightarrow 0$ 、 $4, 5, 6 \rightarrow 1$ 、 $7, 8, 9 \rightarrow 2$ と塗り分ける操作です。塗り分けたあとの色は、行が $0, 3, 6 \mid 1, 4, 7 \mid 2, 5, 8$ のどの組に属するかと、列がこの 3 組のどれに属するかだけで決まります。3 つの行の組と 3 つの列の組をそれぞれ 1 つにまとめて読むと、色の規則は C_3 の演算表と同じになります。9 種類を区別する世界から、3

種類だけを区別する世界へ移ります。それが $C_9/\ker \phi \cong C_3$ です。

10-3

(1) X は部分群ではありません。たとえば、 $1, 2 \in X$ ですが、 $1 + 2 = 3 \notin X$ です。 X の中の元どうしを足した結果が X の外へ出てしまい、閉じていないので、 X は部分群ではありません。

(2) $0 + 0 = 0$ で、 $0 \in X$ なので、結果は X に入ります。 $2 + 2 = 4$ で、 $4 \in Y$ なので、結果は Y に入ります。

どちらも X の中から代表元を選んだのに、答えの入る組が X になったり Y になったりしています。代表元の選び方によって答えの組が変わるので、この分け方では「 X と X の計算」の答えを1つに決められません。

今回の X, Y, Z は、そもそも部分群による剰余類ではありません。群の計算を組どうしの計算へ持ち越すための土台ができていないからです。

(3) 第7章の $H = \{e, f\}$ は部分群でした。そのため、左剰余類や右剰余類を作ること自体はできました。しかし、 H は正規部分群ではなかったもので、剰余類どうしの演算を1つに決められませんでした。今回の X は、そもそも部分群ではありません。したがって、部分群による剰余類を作る段階にまだ到達していません。

つまり、失敗には段階があります。第7章の H は部分群の段階までは進んでいましたが、正規部分群ではありませんでした。商群として計算を持ち越すには、正規部分群による剰余類が必要です。 $\ker \phi = \{0, 3, 6\}$ による分け方がうまくいったのは、準同型の核が必ず正規部分群になるからです。

(1) g と h の所属で 4 通りに分けます。

g の所属	h の所属	gh の所属	$\psi(gh)$	$\psi(g) + \psi(h)$
N	N	N	0	$0 + 0 = 0$
N	fN	fN	2	$0 + 2 = 2$
fN	N	fN	2	$2 + 0 = 2$
fN	fN	N	0	$2 + 2 = 0$

表の「 gh の所属」は、次のことから決まります。 $N = \{e, r, r^2\}$ は回転だけの集合、 $fN = \{f, rf, r^2f\}$ は鏡映を含む操作の集合です。回転と回転を合成すると回転、回転と鏡映を合成すると鏡映、鏡映と回転を合成しても鏡映、鏡映と鏡映を合成すると回転になります。したがって、 gh がどちらに入るかは、 g と h がそれぞれどちらに入るかだけで決まります。

4 通りすべてで、 $\psi(gh) = \psi(g) + \psi(h)$ が成り立っています。 ψ の値は、 g が N と fN のどちらに入るかだけで決まります。したがって、この 4 通りを確かめれば、 D_3 のすべての組み合わせを確かめたことになります。よって、 ψ は準同型写像です。

(2) C_4 の単位元は 0 です。 $\psi(g) = 0$ となるのは e, r, r^2 です。したがって、 $\ker \psi = \{e, r, r^2\} = N$ です。一方、 ψ の値として実際に現れるのは 0 と 2 だけなので、 $\text{Im } \psi = \{0, 2\}$ です。1 と 3 には届いていません。

(3) 準同型定理から、 $D_3 / \ker \psi \cong \text{Im } \psi$ です。今回は、 $\text{Im } \psi = \{0, 2\}$ なので、 $D_3 / \ker \psi \cong \{0, 2\}$ です。ここで $\{0, 2\}$ は C_4 の部分群であり、 $0 + 0 = 0$ 、 $0 + 2 = 2$ 、 $2 + 2 = 0$ となるので、 C_2 と同型です。したがって、 $D_3 / \ker \psi \cong \{0, 2\} \cong C_2$ です。右辺に書くのは終域 C_4 ではなく、実際に届いた像です。

元の数を見ると、 $|\ker \psi| = 3$ 、 $|\operatorname{Im} \psi| = 2$ なので、 $|D_3| = 6 = 3 \times 2$ です。一方、終域 C_4 の元の数は 4 なので、 $6 \neq 3 \times 4$ です。 C_4 には、どの元も送られてこない 1 と 3 が含まれています。そのため、商群と対応する相手として C_4 全体を使うことはできません。準同型定理の右辺が $\operatorname{Im} \psi$ なのは、像が「実際に届いた範囲」だからです。

- (4) f を 1 へ送る準同型写像 $\theta: D_3 \rightarrow C_4$ は作れません。 D_3 では、 $f \circ f = e$ です。準同型なら、 $\theta(f \circ f) = \theta(f) + \theta(f)$ でなければなりません。また、準同型写像は単位元を単位元へ送るので、 $\theta(e) = 0$ です。したがって左辺は 0 です。

ところが $\theta(f) = 1$ とすると、右辺は $1 + 1 = 2$ です。したがって、 $0 \neq 2$ となり、準同型の条件に反します。なお、 $\theta(f) = 3$ とした場合も、 C_4 では $3 + 3 = 2$ なので、同じく不可能です。

f の行き先として使えるのは 0 か 2 です。行き先は自由に決められるのではなく、元の演算関係を保つように決める必要があります。

10-5

(1) ① $001 \circ 010 = r \circ r^2 = r^3 = e = 000$

② $010 \circ 100 = r^2 \circ f = r^2 f = 110$

③ $100 \circ 001 = f \circ r = r^2 f = 110$

④ $101 \circ 101 = (rf) \circ (rf) = e = 000$

(2) ① 一番左の桁だけを取り出すと、次のようになります。

例	1 つ目の左端	2 つ目の左端	答えの左端
①	0	0	0
②	0	1	1
③	1	0	1
④	1	1	0

② 2 つの符号の一番左の桁が $0, 0$ のとき答えの一番左の桁は $0, 0, 1$ のとき $1, 1, 0$ のとき $1, 1, 1$ のとき 0 です。

③ これは C_2 の演算表と同じです。 C_2 の加法で書くと、次のとおりです。
 $0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0$ です。4 例だけの偶然ではありません。一番左の桁が 0 の e, r, r^2 は N の元であり、 1 の f, rf, r^2f は fN の元です。問 10-4(1) の表では、 gh の所属が、 g と h がそれぞれ N と fN のどちらに入るかで決まっていました。一番左の桁は N か fN かを表す桁なので、 D_3 のどの合成でも、答えの一番左の桁は 2 つの一番左の桁だけで決まります。3 桁全部を知らなくても、一番左の桁だけなら計算できます。右 2 桁の違いを見なくても、一番左の桁の計算は壊れません。

(3) ① $001 \circ 001 = r \circ r = r^2 = 010$ なので、答えの右 2 桁は 10 です。 $101 \circ 101 = (rf) \circ (rf) = e = 000$ なので、答えの右 2 桁は 00 です。合成する 2 つの符号の右 2 桁は、どちらも $01, 01$ です。しかし、答えは 10 と 00 に分かれ、一致しません。

② したがって、右 2 桁だけを使った計算を 1 つに決めることはできません。入力として見えている右 2 桁が同じなのに、元が一番左の桁によって答

えが変わります。一番左の桁を捨てて右 2 桁だけを残すと、計算は壊れます。

(4) ① $A_0 = \{000, 001, 010\} = \{e, r, r^2\} = N$ です。また、 $A_1 = \{100, 101, 110\} = \{f, rf, r^2f\} = fN$ です。したがって、 A_0, A_1 は N による 2 つの剰余類です。

② $B_{00} = \{000, 100\} = \{e, f\} = H$ です。次に、 $rH = \{r, rf\} = \{001, 101\} = B_{01}$ 、 $r^2H = \{r^2, r^2f\} = \{010, 110\} = B_{10}$ です。したがって、 B_{00}, B_{01}, B_{10} は H による左剰余類です。

③ 右剰余類を計算すると、 $Hr = \{e \circ r, f \circ r\} = \{r, r^2f\}$ です。一方、 $rH = \{r, rf\}$ なので、 $rH \neq Hr$ です。左剰余類と右剰余類が一致していないので、 $H = \{e, f\}$ は正規部分群ではありません。そのため、 H による剰余類を使って商群の演算を定めることはできません。第 7 章で見た失敗が、右 2 桁だけを残した場合にもう一度現れています。

(5) ① 一番左の桁を答えるので、 $\phi(000) = \phi(001) = \phi(010) = 0$ 、 $\phi(100) = \phi(101) = \phi(110) = 1$ です。これは、第 8 章で作った $\phi: D_3 \rightarrow C_2$ と同じ写像です。 D_3 の元を 3 桁の符号で書き直ただけです。

核は、0 に送られる元を全部集めたものなので、 $\ker \phi = \{000, 001, 010\} = A_0 = N$ です。この写像は一番左の桁だけを見ているので、 A_0 の中にある右 2 桁の違い 00, 01, 10 は区別されません。

また、実際に現れる値は 0 と 1 なので、 $\text{Im } \phi = \{0, 1\} = C_2$ です。3 桁から右 2 桁の違いを見なくなったあとに、残っている一番左の桁が像です。

② 準同型定理から、 $D_3 / \ker \phi \cong \text{Im } \phi = C_2$ です。

③ 問 10-5(2) では、一番左の桁だけを残しても計算が壊れません。一番左の桁を答える写像が準同型だからです。このとき核は $N = \{e, r, r^2\}$

で、 N は正規部分群です。したがって、 N による剰余類どうしの計算を定めることができます。

一方、右 2 桁が同じ元をまとめると、 $H = \{e, f\}$ による左剰余類が現れます。ここで、右 2 桁の 3 種類に群演算を定め、右 2 桁を答える写像が準同型になったと仮定します。単位元 $e = 000$ の右 2 桁は 00 なので、 00 に送られる元を集めた $B_{00} = \{000, 100\} = H$ がその核になります。しかし、準同型の核は必ず正規部分群であり、 H は正規部分群ではありません。したがって、右 2 桁の 3 種類に群演算を定めて、右 2 桁を答える写像を準同型にすることはできません。これは、問 10-5(3) ①で、合成する 2 つの符号の右 2 桁が同じなのに、答えの右 2 桁が異なったことと同じ事情です。

つまり、この問題で見たのは、「情報を捨てても計算が残る捨て方と、捨てると計算が壊れる捨て方がある」ということです。準同型は計算の仕組みを保つ写像であり、異なる元を同じ像に送るときには情報がまとめられます。そのとき、同じものとして見えなくなった違いをまとめる基準が核です。

準同型定理 $D_3 / \ker \phi \cong \text{Im } \phi$ は、「核でまとめた世界」と「実際に残った像の世界」が同じ計算の仕組みを持つ、と言っています。

第10章のまとめ

- $C_9 \rightarrow C_3$ でも準同型定理が成り立つ。このとき $C_9/\ker \phi \cong C_3$ であり、 $9 = 3 \times 3$ となる。
- 行き先として用意した終域のすべてに届くとは限らない。実際に届いた範囲が像であり、準同型定理は像を使う。 $D_3 \rightarrow C_4$ では $6 = 3 \times 2$ であり、 $6 = 3 \times 4$ ではない。
- 3桁の符号の一番左だけを見る写像では、右2桁の違いが見えなくなる。核は $\{000, 001, 010\}$ 、像は $\{0, 1\}$ で、 $6 = 3 \times 2$ となる。
- 情報のまとめ方には、計算の仕組みが残るものと壊れるものがある。情報をまとめても計算の仕組みを保つのが準同型であり、どの違いを同じものとして見るかを表すのが核である。

000	001	010	100	101	110
-----	-----	-----	-----	-----	-----