

第 11 章 機械と音楽をつなぐ「群」

ついに、副題である「ねじ・音楽・群」にたどり着きました。機械（時計とねじ）と音楽に共通する構造を見つけていきます。

この章には、音源や、実際に操作できる教材があります。音楽を聴いたり、時計やねじ、キューブを動かしたりするには、Web 版が便利です。下記のリンク、または QR コードからご覧いただけます。

Web 版「機械と音楽をつなぐ『群』」



§11.1 歯車 — 回りと、再び出会う

まず、下記の直積時計から見てください。画像をクリックすると開きます。アプリとして、デスクトップに置けます。



直積時計

この時計は、1 時間ごとに正三角形は 120° 、正方形は 90° 、正 12 角形は、 30°

回転します。三つの図形が別々のリズムで動きます。三角形には向きを示す印が付いているので、 120° 回しても、どの状態にあるかが分かります。

三角形と正方形だけを見て、時刻を読むことができます。三角形は 3 通りのどれか、正方形は 4 通りのどれか、必ずどこかにいます。二つを組にして書くと、12 時間の間に次のように変わります。

時刻	三角形	正方形
0 時	0	0
1 時	1	1
2 時	2	2
3 時	0	3
...	...	...
11 時	2	3

3 と 4 は 1 以外に共通の約数をもたない（互いに素である）ので、（三角形、正方形）の組は 12 時間のあいだ一度も重複せず、12 通りすべてが現れます。だから二つの図形だけで時刻が決まります。

このように、ものを動かしたときに、動きどうしの間に現れる関係を、「構造」と呼ぶことにします。

直積時計は、3 通りと 4 通りの動きが重なり、12 通りで一巡して元に戻る、という構造です。言い換えると、別々の周期で動くものが組み合わさって、新しい一つの周期が現れる。「回って、再び出会う」です。

直積時計を見ていたら、こんなことが思い浮かびました。

それぞれの周期で回り、時に重なり、離れ、また重なる。私が感じる時間と

は、同時に進んでいるものの重なりではないのか。

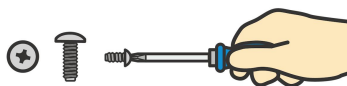
人間は「時間そのもの」を見ることはできません。見ているのは変化です。四季が巡る。潮が満ちて引く。朝になり、夜になる。月が満ち欠けする。花が咲いて、散る。それぞれ周期も位相も違い、それぞれのリズムで進んでいる。それでも、ある瞬間には重なる。それぞれ別の現象なのに、それらの変化を重ねて、人は時間を実感している。

「違う周期で動くものを、同時に見ると何が見えるのだろう」

人は、そこに何かの関係を見るのかも知れません。

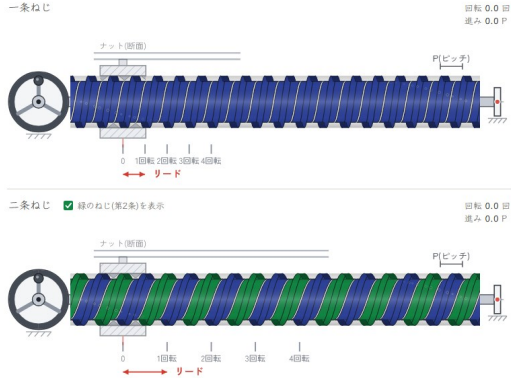
§11.2 ねじ — 前進か後退か

日常で最も目にするねじは、ドライバーで回して締める、いわゆる「ねじ」だと思います。



これは、機械の用語でいうと、一条ねじといいます。ねじの螺旋が一本です。螺旋が二本のものは、二条ねじといいまして、びんのふた、ペットボトルのキャップの一部などに使われています。

下記は、一条ねじと二条ねじの違いをみえるようにしたコンテンツです。画像をクリックすると、ブラウザー上でハンドルを回して、部品を動かすことができます。



一条ねじ・二条ねじ

ねじの山同士の間隔をピッチといいます。一条ねじなら、ハンドル1回転でねじ1ピッチ。二条ねじなら1回転で2ピッチ分進みます。ハンドルの回転の速さは同じでも、ナットの進む速さが変わります。

二条ねじでは、1回転ごとに1ピッチ飛ばして、2ピッチ先に進むことになります。この「2つずつ進む」という形は、あとで音楽の中にもう一度出てきます。

§11.3 構造で見る、ねじと歯車

ねじと歯車（時計）の違いは、なんでしょう。

時計の針は、回転していれば、いずれ同じ場所に戻ってきます。三角形も3回、正方形なら4回で戻ります。ところが、ねじは、同じ向きに回し続けるかぎり、同じ場所には戻りません。

ねじを締める向きをプラス、緩める向きをマイナスとして、1回転、2回転、3回転と数えていくと、...、-3、-2、-1、0、1、2、3、...という整数の並びと同じ形が現れます。輪ではありません。両側にどこまでも続いていく直線です。

歯車は「輪」の中を巡って元に戻る。ねじは「直線」の上を進み、同じ向きに

回すかぎり戻らない。違う構造をしています。

では、ねじと歯車に、共通する構造はあるでしょうか。

一つ目は、元に戻す動きがあることです。1時間進めた時計は1時間戻せば元に戻り、1回転締めたねじは1回転緩めれば元に戻ります。

二つ目は、動きを重ねても、同じ種類の動きになることです。時計を2時間進めて、さらに3時間進めれば、合わせて5時間進めたのと同じです。ねじを2回転締めて、さらに3回転締めれば、合わせて5回転締めたのと同じです。動きを組み合わせても、時計の動き、ねじの動きの範囲内です。

輪と直線という違いがあっても、動きどうしの関係には、こうした共通する構造があります。数学では、このような構造をもつ動きの集まりを、「群」^{**1}と呼びます。歯車の動きも、ねじの動きも、群の一例です。次の節では、「群」を音楽の中に探してみます。

^{**1} 群の定義については、巻末の「用語のまとめ」を参照。

§11.4 音楽に現れる「群」

「ハッピーバースデー」を、続けて二つ聴いてください。

「▶再生」をクリックすると、ブラウザーで音声が開き、再生されます。自動で再生されない場合は、開いた画面で再生ボタンを押してください。

1. Happy Birthday (原形)

Happy Birthday (原形)

♩ = 180



▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

2. Happy Birthday (移調)

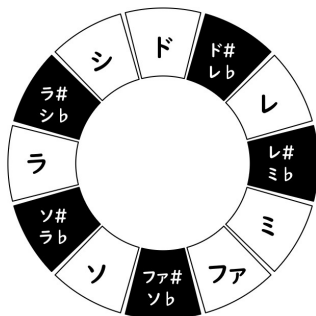
Happy Birthday (移調)

♩ = 180



▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

音の高さは違いますが、どちらも「ハッピーバースデー」だと分かります。二つ目（移調）は、一つ目（原形）の全部の音を上げたものです。すべての音を、音どうしの関係を保ったまま移動させたので、「ハッピーバースデー」に聞こえます。この操作を「移調」と呼びます。



ピアノの鍵盤を見ると、1 オクターブが12 の半音に分かれています。半音ずつ12 回上がると、始めた音と同じ名前の音（1 オクターブ上のドなど）に戻ります。音名も、時計と同じように「12 個の輪」として描けます。移調は、この輪全体を同じだけずらすことです。時計の目盛りを1 目盛り進めると、似ていませんかい**2。

もう一つ、違う動かし方があります。

3. Happy Birthday（反行）

Happy Birthday（反行）

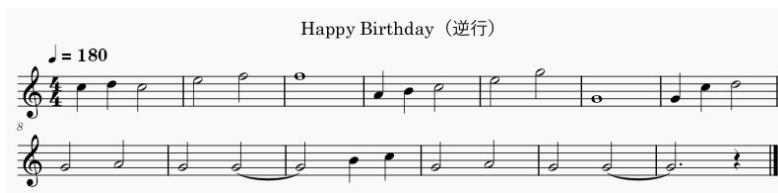
♩ = 180

▶ 再生

| [MIDI をダウンロード](#)

原曲で上がっているところが下がっています。音の高さを、鏡で映したような形です。この動きを「反行」と呼びます。反行を2 回すると、上下が入れ替わって、また入れ替わって、元に戻ります。

4. Happy Birthday (逆行)



▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

今度は音符の並び方を、後ろから読んでいます。音そのものを逆再生したものではありません。ここでは、音の長さは元のままで、音の高さの並びだけを最後から順に読んでいます。この動きを「逆行」と呼びます。逆行を2回すると、後ろから読んで、また後ろから読んで、元に戻ります。

反行と逆行を、両方かけたらどうなるでしょうか。

5. Happy Birthday (反行逆行)



▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

上下も、前後も、両方鏡で映した形になります。先に反行してから逆行しても、先に逆行してから反行しても、結果は同じです。

これで、原形・反行・逆行・反行逆行という4つの形ができました。原形のまま何もしない場合も一つの操作と考えると、この4つの操作のどれとどれを組み合わせても、答えは必ずこの4つのどれかになります。反行と逆行を組み合わせ

れば反行逆行、反行逆行に反行を重ねれば逆行、といった具合です。外から新しいものは出てきません。これで、§11.3 で歯車とねじにあった二つの性質が、音楽の中にも現れました。ハッピーバースデーに対する動きも、群として扱えます。

いくつかの形を同時に鳴らしてみます。まず 3 つ、次に 4 つを重ねてみます。

6. Happy Birthday (3 重)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

7. Happy Birthday (4 重)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

移調と反行、逆行を組み合わせることもできます。

8. Happy Birthday (移調&反行逆行)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

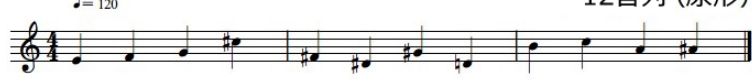
****2** 時計の 12 と音楽の 12 は、由来としては別のものです。時計の 12 は、古代エジプトなどで昼や夜を 12 に分けて時刻を数えた歴史につながっています。現代のピアノでは、オクターブを 12 の等しい半音に分ける十二平均律が一般的です。両者に直接の由来関係はありませんが、どちらも「12 個で一巡する輪」です。

§11.5 12 音技法とシェーンベルク

違う音の並びでも、反行や逆行を試してみます。今度は、1 オクターブにある 12 種類の音を 1 回ずつ使った音列で試してみます。

♯1
♩ = 120

12音列 (原形)



12音列 (反行)



12音列 (逆行)



12音列 (反行逆行)



9. 12 音列 (原形)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

10. 12 音列 (反行)

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

11. 12 音列（逆行）

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

12. 12 音列（反行逆行）

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

こうした音の並びと、原形・反行・逆行・反行逆行、さらにそれらを移調したものを組み合わせて作曲する方法を、12 音技法といいます。20 世紀の作曲家シェーンベルクが発展させました**3。その実例の一つが《ピアノ組曲作品 25》です。

A. シェーンベルク《ピアノ組曲 作品 25》第 5 曲「メヌエットとトリオ」

演奏：Glenn Gould Source: Glenn Gould Official Artist Channel / Sony Classical

▶ [YouTube で見る](#)

****3** アルノルト・シェーンベルク（1874–1951）。オーストリア生まれの作曲家。1 オクターブにある 12 種類の音の一つずつ含む音列を作曲の基礎に置き、原形・反行・逆行・反行逆行、さらにそれらの移調を用いて曲を組み立てる 12 音技法を発展させました。20 世紀後半のアメリカでは、ミルトン・パピット、アレン・フォート、ジョゼフ・ストラウスといった音楽学者や作曲家が、こうした操作の集まりを数学の言葉で整理する研究を進めました。

§11.6 バッハ — 反行と逆行を駆使した作曲家

反行や逆行は、20 世紀に発明されたものではありません。ずっと古くから、作曲家たちは同じ動きを作品の骨組みに使ってきました。

13. バッハ「蟹のカノン」

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

18 世紀の作曲家バッハの曲です**4。一つの旋律を、一方は頭から、もう一方は末尾から演奏すると、二つの旋律が同時に成立します。逆向きに読んでもびつたり合うメロディーを、およそ 280 年前に人が書いていました。

もう一つ、バッハの「螺旋のカノン」の仕組みを、教材用音源で聴いてみます。

14. バッハ「螺旋のカノン」の仕組み（教材用音源）

▶ 再生 | [MIDI をダウンロード](#)

短いメロディーが、少しずつ上がっていきます。1 回終わるごとに、全体が 2 半音（全音）ずつ上がって、また同じメロディーが始まります。6 回上がると $2 \times 6 = 12$ 半音、つまり 1 オクターブ上に到達して、始めた音と同じ名前の音に戻ります。音の 12 個の輪の上を、2 半音ずつ 6 回進んで一巡する形です。

このとき、「音名の輪」の上で通る移調の位置は、12 個のうち 6 個だけです。§11.2 で見た二条ねじが 1 回転ごとに山を 1 つ飛ばして進んだのと、同じ形が音楽の中にも現れています。機械の中で見た動きが、音楽の中にもあります。

時計の三角形は 3 時間で戻りました。螺旋のカノンは、メロディーが 2 半音ずつ上がる動きを 6 回繰り返して、元の音名に戻ります。「輪の上を巡って戻る」が、280 年前の音楽の中にも入っていました。

バッハは数学を用いて作曲したわけではありませんが、曲の構造は、数学で記述できるような形をしています。バッハが会員であった「音楽学術協会」は「数学と哲学によって音楽を発展させる」ことを掲げており、作曲において数学的な構

造を意識していたとしても不思議はありません。

実際の演奏は、こちらから聴けます。

J. S. Bach 《音楽の捧げもの》BWV 1079/4 「蟹のカノン」

演奏：Shunske Sato Video: Netherlands Bach Society / All of Bach

▶ [YouTube で見る](#)

J. S. Bach 《音楽の捧げもの》BWV 1079/8 「Canon a 2 per tonos」（螺旋のカノン）

演奏：Shunske Sato (violin)、Leo van Doeselaar (fortepiano) Video: Netherlands Bach Society / All of Bach

▶ [YouTube で見る](#)

****4** ヨハン・ゼバスティアン・バッハ (1685–1750)。「音楽の捧げもの」(1747)に、「蟹のカノン」と「螺旋のカノン」(原題 Canon per Tonos、「無限に上昇するカノン」とも呼ばれる)が含まれています。螺旋のカノンは、反復するたびに全音上へ転調するよう作られており、繰り返せば理論上どこまでも上昇していきます。この章の音源は、王の主題（フリードリヒ大王が示した主題）の冒頭8音を全音ずつ上げて7回並べた教材用のもので、原曲を単声化したものではありません。

§11.7 違うもののの中に同じものを見つける

時計を1時間進める。ハンドルを1回転させる。音を1半音上げる。反行を1回かける。歯車、ねじ、音楽。別々に見えるものに、共通する構造が現れていました。

振り返ると、見えてきた構造は、次の3つです。

1. 繰り返すと元に戻るものがある（歯車、音名、反行）。戻らないものもある

(ねじ)。

2. どれにも、元に戻す動きがあります。進めた時計は戻せる。締めたねじは緩められる。反行は2回で元に戻る。
3. 動きを重ねても、持っている動きの範囲から出ない。時計を2時間進めて、さらに3時間進めれば、5時間進めた動きになる。反行と逆行を組み合わせれば反行逆行。持っていないものは、作られない。

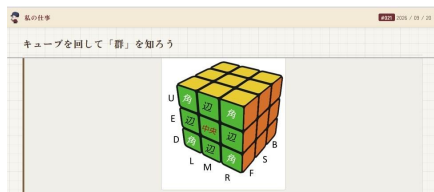
時計、ねじ、移調、反行と逆行、シェーンベルクの音列、バッハのカノン。同じ仕組みが、機械の中にも、音楽の中にも入っていました。違うものの中にある「同じ」もの。これを扱う数学が「群論」です。

身の回りを「群」の目で見渡してみると、「あれも群かな？ これも群と言えるかな？」という視点が生まれます。機械と音楽のように、共通点を挙げるのが難しいと思っていたものの中に、同じ構造、共通する何かを持っていることに気づかされます。

§11.8 キューブを回して「群」を知ろう

ルービックキューブの回転操作の集まりも、群です。同じ操作を繰り返すと、いつか元に戻ります。操作を組み合わせても、集まりの外には出ません。順番を変えると結果が変わることもあり、音楽の移調と反行の組み合わせも、その一つです。

キューブを操作しながら群の考え方を学ぶ Web 教材を作りました。画像をクリックすると開きます。10 のステップで、置換、逆元、非可換、位数などの用語を体験できます。間違えてもヒントが出るので、まず動かしてみてください。



キューブを回して「群」を知ろう

§11.9 群論基礎クイズ

第1章から第11章までの内容を、3択で確かめることができるクイズを作りました。下記の画像をクリックすると開きます。



群論基礎クイズ

第11章のまとめ

- 「群論」とは、違うものの中にある「同じ」ものを扱う数学である。数式や記号を使わなくても、「群」という視点でみると、新しい気づきが生まれる。